



ACTA DE EVALUACIÓN DE LA TESIS DOCTORAL

Año académico 2016/17

DOCTORANDO: MARTÍN SÁNCHEZ, JOSÉ LUIS

D.N.I./PASAPORTE: \*\*\*\*3046B

PROGRAMA DE DOCTORADO: D441-ELECTRÓNICA: SISTEMAS ELECTRÓNICOS AVANZADOS. SISTEMAS INTELIGENTES

DEPARTAMENTO DE: ELECTRÓNICA

TITULACIÓN DE DOCTOR EN: DOCTOR/A POR LA UNIVERSIDAD DE ALCALÁ

En el día de hoy 03/07/17, reunido el tribunal de evaluación nombrado por la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado de la Universidad y constituido por los miembros que suscriben la presente Acta, el aspirante defendió su Tesis Doctoral, elaborada bajo la dirección de MANUEL R. MAZO QUINTAS // SIRA ELENA PALAZUELOS CAGIGAS.

Sobre el siguiente tema: APORTACIONES AL DISEÑO DE INTERFACES PERSONA-MÁQUINA UTILIZANDO SEÑALES EEG

Finalizada la defensa y discusión de la tesis, el tribunal acordó otorgar la CALIFICACIÓN GLOBAL<sup>8</sup> de (no apto, aprobado, notable y sobresaliente): SOBRESALIENTE

Alcalá de Henares, 3 de julio de 2017

EL PRESIDENTE

Fdo.: J. L. Pons

EL SECRETARIO

Fdo.: L. Borvete

EL VOCAL

Fdo.: R. Ros Aguero

Con fecha 24 de julio de 2017 la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado, a la vista de los votos emitidos de manera anónima por el tribunal que ha juzgado la tesis, resuelve:

- ☒ Conceder la Mención de "Cum Laude"  
☐ No conceder la Mención de "Cum Laude"

La Secretaria de la Comisión Delegada

FIRMA DEL ALUMNO,

Fdo.: J. L. Martín Sánchez

<sup>8</sup> La calificación podrá ser "no apto" "aprobado" "notable" y "sobresaliente". El tribunal podrá otorgar la mención de "cum laude" si la calificación global es de sobresaliente y se emite en tal sentido el voto secreto positivo por unanimidad.

INCIDENCIAS / OBSERVACIONES:





Universidad  
de Alcalá

COMISIÓN DE ESTUDIOS OFICIALES  
DE POSGRADO Y DOCTORADO

En aplicación del art. 14.7 del RD. 99/2011 y el art. 14 del Reglamento de Elaboración, Autorización y Defensa de la Tesis Doctoral, la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado, en sesión pública de fecha 24 de julio, procedió al escrutinio de los votos emitidos por los miembros del tribunal de la tesis defendida por *MARTÍN SÁNCHEZ, JOSÉ LUIS*, el día 3 de julio de 2017, titulada *APORTACIONES AL DISEÑO DE INTERFACES PERSONA-MÁQUINA UTILIZANDO SEÑALES EEG*, para determinar, si a la misma, se le concede la mención "cum laude", arrojando como resultado el voto favorable de todos los miembros del tribunal.

Por lo tanto, la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado resuelve otorgar a dicha tesis la

***MENCIÓN "CUM LAUDE"***

Alcalá de Henares, 27 julio de 2017  
EL PRESIDENTE DE LA COMISIÓN DE ESTUDIOS  
OFICIALES DE POSGRADO Y DOCTORADO



Firmado digitalmente por VELASCO  
PEREZ JUAN RAMON - DNI  
03087239H  
Fecha: 2017.07.30 18:42:33 +02'00'

Juan Ramón Velasco Pérez

Copia por e-mail a:

Doctorando: MARTÍN SÁNCHEZ, JOSÉ LUIS

Secretario del Tribunal: LUCIANO BOQUETE VÁZQUEZ.

Directores de Tesis: MANUEL R. MAZO QUINTAS // SIRA ELENA PALAZUELOS CAGIGAS



Programa de Doctorado en Electrónica: Sistemas  
Electrónicos Avanzados. Sistemas Inteligentes

# **Aportaciones al diseño de interfaces persona-máquina utilizando señales EEG**

Tesis Doctoral presentada por  
**José Luis Martín Sánchez**

2017





Universidad  
de Alcalá

Programa de Doctorado en Electrónica: Sistemas  
Electrónicos Avanzados. Sistemas Inteligentes

# Aportaciones al diseño de interfaces persona-máquina utilizando señales EEG

Tesis Doctoral presentada por  
**José Luis Martín Sánchez**

Directores

**Dr. Manuel Mazo Quintas y Dra. Sira Elena  
Palazuelos Cagigas**

Alcalá de Henares, 30 de marzo de 2017





D. Sira E. Palazuelos Cagigas, Directora del Departamento de Electrónica de la Universidad de Alcalá

**INFORMA** que la Tesis Doctoral titulada: **Aportaciones al diseño de interfaces persona-máquina utilizando señales EEG** presentada por D. **José Luis Martín Sánchez**, bajo la dirección del Dr. D. Manuel Mazo Quintas y la Dra. D<sup>a</sup> Sira E. Palazuelos Cagigas, reúne los requisitos científicos de originalidad y rigor metodológicos para ser defendida ante un tribunal.

Para que así conste y surta los efectos oportunos, se firma el presente informe en Alcalá de Henares a 28 de marzo de 2017.



Fdo.: Sira E. Palazuelos Cagigas

Dr. D. Manuel R. Mazo Quintas, Catedrático de Universidad de la Universidad de Alcalá  
Dra. D<sup>a</sup> Sira E. Palazuelos Cagigas, Profesora Titular de Universidad de la Universidad de Alcalá

**INFORMAN:** que la Tesis Doctoral titulada **Aportaciones al diseño de interfaces persona-máquina utilizando señales EEG**, presentada por D. **José Luis Martín Sánchez**, y realizada bajo nuestra dirección, dentro del campo de las interfaces persona máquina, reúne los méritos de calidad y originalidad para optar al Grado de Doctor.

Alcalá de Henares a 28 de marzo de 2017,

Fdo.: D. Manuel Mazo Quintas



Sira E. Palazuelos Cagigas

D. Manuel R. Mazo Quintas, Coordinador del Programa de Doctorado en Electrónica: Sistemas Electrónicos Avanzados. Sistemas Inteligentes

**INFORMA** que la Tesis Doctoral titulada: **Aportaciones al diseño de interfaces persona-máquina utilizando señales EEG** presentada por D. **José Luis Martín Sánchez**, bajo la dirección del Dr. D. Manuel Mazo Quintas y la Dra. D<sup>a</sup> Sira E. Palazuelos Cagigas, reúne los requisitos científicos de originalidad y rigor metodológicos para ser defendida ante un tribunal.

Para que así conste y surta los efectos oportunos, se firma el presente informe en Alcalá de Henares a 28 de marzo de 2017,

Fdo.: D. Manuel Mazo Quintas







**A mi familia.**



# Agradecimientos

Son muchas las personas a las que me gustaría hacer llegar mi agradecimiento al poner el punto final a este trabajo.

Comenzaré, en primer lugar, por aquellos que me dieron la oportunidad de trabajar en él. Gracias Manuel Mazo y Luciano Boquete por lanzar el reto, permitirme aceptarlo, guiarme en el camino y esperar, pacientemente, su fin. Más allá de los primeros pasos, gracias Manolo por acoger y cuidar, por formar familia y tener la puerta abierta siempre y sin condiciones a todos los que pasamos por aquí.

Gracias a los compañeros del Departamento de Electrónica con los que comparto el día a día desde hace ya unos cuantos años. Especialmente, y trascendiendo las paredes de este edificio, a Javier Macías, quien ha acabado ayudando a bautizar a esta criatura y cuya profesionalidad y, sobre todo, generosidad, ambas sin medida, han hecho posible llevar a cabo los experimentos de esta investigación. Gracias Ernesto por compartir el camino buscando sentido un poco más allá, sin dejar de provocar nunca una sonrisa.

Gracias a todos los que habéis preguntado y animado o animado sin preguntar. A los que compartís la alegría de llegar hasta aquí, locos y confiados de toda condición. Gracias Alberto, Alfonso, Helena, Santi, Luis. Gracias Sara, Juan, Cristina, Javi, Laura, Dani, Alberto y Alberto, Tere, Raúl. Gracias Olga, Patty, Bea. Gracias Jaime por poner paz y sentido en las cosas.

GraciAs Sira por mucho más que por dirigir y dar fondo y forma a este trabajo. Por cuidar y compartir, por creer y por confiar. Por estAr. Gracias Mónica. Todo, siempre y sin condición. Gracias Jesús, Chechu, por el regalo de crecer juntos y compartir desde el principio.

Gracias Cris, Miguel y Alba. Proyecto de vida con mayúsculas. Por estar a mi lado incondicionalmente, por disfrutar de la vida con emociones absolutas y por recordarme que siempre se puede mejorar.

Y finalmente, gracias a mis padres, que me habéis enseñado todo lo necesario para llegar hasta aquí y sin quienes, sencillamente, nada de esto habría sido posible.



# Resumen

Las grandes ventajas que brindan los sistemas informáticos y los dispositivos inteligentes, cuya presencia se ha incrementado de manera drástica en los últimos años, resultan inaccesibles para los usuarios que no pueden interactuar con las interfaces convencionales de estos sistemas. Este trabajo se enmarca dentro de las investigaciones realizadas en interfaces alternativas cuyo objetivo es facilitar el acceso de todos los posibles usuarios a estas tecnologías.

La tesis doctoral presentada en este documento aborda el diseño de una interfaz cerebro-ordenador, es decir, una interfaz hombre-máquina basada en la adquisición e interpretación de las señales electroencefalográficas, que pretende establecer un canal de comunicación directo entre el cerebro y el ordenador. Partiendo de los registros EEG, generados de manera voluntaria por un usuario al realizar dos tareas mentales relacionadas con la imaginación del movimiento de sus manos, recogidos únicamente en dos electrodos situados sobre la superficie del cuero cabelludo, se propone una arquitectura capaz de reconocer dichas tareas mentales y traducirlas en acciones de un ordenador.

En este trabajo, se estudian todas las etapas de una interfaz de este tipo y se realizan aportaciones en cada una de ellas. En la fase de preprocesamiento, se ha propuesto una arquitectura combinada de la transformada de Fourier y la transformada wavelet. En la fase de extracción y selección de características, se estudian diversas alternativas basadas en la evolución de los algoritmos de análisis de componentes principales y de mínimos cuadrados parciales. Y en la fase de clasificación o traducción, se han propuesto cuatro arquitecturas adaptadas a los métodos de selección y extracción de características presentados, basadas en cálculo de distancias entre señales originales y las recuperadas por el algoritmo de análisis de componentes principales robusto, en el análisis discriminante robusto también sobre las señales transformadas mediante esta misma técnica, en un algoritmo de regresión lineal sobre las componentes latentes obtenidas por el algoritmo de mínimos cuadrados parciales y, finalmente, en las máquinas de vectores soporte.

Con el fin de evaluar en profundidad todas las aportaciones, se ha generado una base de datos de señales EEG a partir de los registros de doce usuarios y se ha llevado a cabo un profundo estudio estadístico de todas las alternativas diseñadas y sus parametrizaciones, realizando más de 800000 experimentos hasta llegar a la propuesta de la mejor combinación.



# Abstract

The great advantages of computer systems and intelligent devices, whose presence has increased drastically in recent years, are inaccessible to users who can not interact with the conventional interfaces of these systems. This work is part of the research carried out on alternative interfaces aimed at facilitating the access of all possible users to these technologies.

This Ph.D. thesis addresses the design of a brain-computer interface, a human-machine interface based on the acquisition and interpretation of electroencephalographic signals, which aims to establish a direct communication channel between the brain and the computer. Using EEG records, generated voluntarily by a user while performing two mental tasks related to the imagination of the movement of his hands, collected only on two electrodes located on the surface of the scalp, an architecture for recognizing those tasks and translating them into computer actions is proposed.

In this work, all the stages of an interface of this type are studied and contributions are made in each of its phases. In the initial preprocessing stage, a fusion of the Fourier and the wavelet transforms is proposed. In the phase of feature extraction and selection, several alternatives are presented, based on the evolution of the algorithms of principal component analysis and partial least squares. Four classification architectures, adapted to the methods of feature selection and extraction, have been detailed in the classification or final translation stage. They are based on calculation of distances between original signals and those recovered by the robust principal component analysis algorithm, on the robust discriminant analysis of the signals transformed by this same technique, on a linear regression algorithm on the latent components obtained by the partial least squares algorithm and, finally, on support vector machines.

In order to assess in depth all the proposed contributions, a database of electroencephalographic signals has been built with twelve users' records. A thorough statistical study on all the alternatives designed and their possible parameterizations has been carried out, performing more than 800000 experiments.





# Índice general

Resumen	IX
Abstract	XI
Índice general	XIII
Índice de figuras	XIX
Índice de tablas	XXV
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Interfaces cerebro-ordenador. Encuadre científico-tecnológico</b>	<b>5</b>
2.1 Introducción . . . . .	5
2.2 El cerebro . . . . .	5
2.3 Arquitectura genérica y características principales de una BCI . . . . .	7
2.3.1 Adquisición de las señales . . . . .	7
2.3.2 Modo de operación . . . . .	10
2.3.3 Patrones cerebrales . . . . .	12
2.3.3.1 Potenciales evocados . . . . .	12
2.3.3.2 Potenciales corticales lentos . . . . .	13
2.3.3.3 Oscilaciones o ritmos . . . . .	14
2.3.4 Estrategia mental . . . . .	16
2.3.5 Realimentación . . . . .	17
2.3.6 Procesamiento de señal . . . . .	18
2.3.6.1 Extracción y selección de características . . . . .	20
2.3.6.2 Traducción de características . . . . .	22
2.3.7 Aplicación y medida de prestaciones . . . . .	22

2.3.7.1	Aplicación . . . . .	22
2.3.7.2	Medida de prestaciones . . . . .	23
2.4	Estudio de algunas interfaces ya existentes . . . . .	24
2.4.1	Graz BCI . . . . .	24
2.4.2	Berlin BCI . . . . .	26
2.4.3	Wadsworth BCI . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Arquitectura de preprocesado, extracción y selección de características de las señales EEG</b>	<b>29</b>
3.1	Introducción . . . . .	29
3.2	Transformada de Fourier y transformada wavelet . . . . .	31
3.2.1	Transformada de Fourier . . . . .	31
3.2.2	Transformada wavelet . . . . .	36
3.2.2.1	Conceptos previos . . . . .	36
3.2.2.2	Transformada wavelet continua ( <i>Continuous Wavelet Transform, CWT</i> ) . . . . .	37
3.2.2.3	Transformada wavelet discreta ( <i>Discrete Wavelet Transform, DWT</i> ) mediante discretización de los parámetros $\tau$ y $s$ . . . . .	38
3.2.2.4	Transformada wavelet discreta ( <i>Discrete Wavelet Transform, DWT</i> ). Análisis multirresolución . . . . .	39
3.2.3	Arquitectura propuesta para el uso de la transformada wavelet discreta aplicada a la extracción de características de señales electroencefalográficas. Combinación con la transformada de Fourier. . . . .	52
3.3	Análisis de componentes principales . . . . .	59
3.3.1	Conceptos previos . . . . .	59
3.3.1.1	Regresión múltiple lineal . . . . .	59
3.3.1.2	Desarrollo del análisis de componentes principales . . . . .	60
3.3.1.3	Un ejemplo ilustrativo . . . . .	64
3.3.2	Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante ACP . . . . .	68
3.3.3	Análisis robusto de componentes principales . . . . .	71
3.3.3.1	Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante ARCP . . . . .	73
3.4	Mínimos cuadrados parciales . . . . .	74

3.4.1	Conceptos previos . . . . .	74
3.4.1.1	Ejemplo ilustrativo . . . . .	78
3.4.2	Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante MCP . . . . .	80
3.4.3	Análisis robusto por mínimos cuadrados parciales . . . . .	81
3.4.3.1	Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante MCPR . . . . .	82
3.5	Conclusiones y aportaciones . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Clasificación de señales EEG</b>	<b>85</b>
4.1	Introducción . . . . .	85
4.2	Descripción de los clasificadores propuestos . . . . .	86
4.2.1	Distancias entre vectores originales y recuperados mediante análisis de componentes principales . . . . .	86
4.2.1.1	Conceptos previos . . . . .	86
4.2.1.2	Arquitectura de clasificación basada en la medida de distancias entre vectores originales y recuperados mediante análisis de componentes principales . . . . .	86
4.2.2	Análisis discriminante robusto . . . . .	90
4.2.2.1	Conceptos previos . . . . .	90
4.2.2.2	Arquitectura de clasificación basada en el análisis discriminante robusto . . . . .	92
4.2.3	Regresión lineal basada en las componentes latentes obtenidas mediante el método de MCP . . . . .	94
4.2.3.1	Conceptos previos . . . . .	94
4.2.3.2	Arquitectura de clasificación basada en mínimos cuadrados parciales . . . . .	96
4.2.4	Máquinas de vectores soporte . . . . .	97
4.2.4.1	Conceptos previos . . . . .	97
4.2.4.2	Arquitectura de clasificación basada en máquinas de vectores soporte . . . . .	104
4.3	Conclusiones y aportaciones . . . . .	106

<b>5</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>109</b>
5.1	Introducción . . . . .	109
5.2	Descripción de los conjuntos de datos . . . . .	109
5.2.1	Paradigma experimental . . . . .	110
5.2.2	Base de datos de la Universidad Tecnológica de Graz . . . . .	111
5.2.3	Base de datos de la Universidad de Alcalá . . . . .	111
5.3	Descripción general de los experimentos . . . . .	114
5.4	Preprocesamiento . . . . .	117
5.5	Arquitecturas basadas en ACP . . . . .	118
5.5.1	Descripción de las arquitecturas analizadas . . . . .	118
5.5.1.1	Extracción y selección de características . . . . .	118
5.5.1.2	Clasificación . . . . .	120
5.5.2	Resumen de las arquitecturas analizadas . . . . .	120
5.5.3	Resultados . . . . .	122
5.5.4	Conclusiones y aportaciones . . . . .	132
5.6	Arquitecturas basadas en MCP . . . . .	133
5.6.1	Descripción de las arquitecturas analizadas . . . . .	133
5.6.1.1	Preprocesamiento . . . . .	133
5.6.1.2	Extracción y selección de características . . . . .	133
5.6.1.3	Clasificación . . . . .	133
5.6.2	Resumen de arquitecturas analizadas . . . . .	134
5.6.3	Resultados . . . . .	136
5.6.4	Conclusiones y aportaciones . . . . .	142
5.7	Arquitecturas basadas en SVM . . . . .	143
5.7.1	Descripción de las arquitecturas analizadas . . . . .	143
5.7.1.1	Preprocesamiento . . . . .	143
5.7.1.2	Extracción y selección de características . . . . .	143
5.7.1.3	Clasificación . . . . .	143
5.7.2	Resumen de arquitecturas analizadas . . . . .	144
5.7.3	Resultados . . . . .	145
5.7.4	Conclusiones y aportaciones . . . . .	148
5.8	Comparativa de las mejores arquitecturas . . . . .	149

<b>6 Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>153</b>
6.1 Conclusiones . . . . .	153
6.2 Trabajos futuros . . . . .	155
<b>A Características del cluster de computación</b>	<b>157</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>159</b>



# Índice de figuras

1.1	Esquema general de una BCI. . . . .	3
2.1	Aspectos más importantes que definen una BCI. . . . .	8
2.2	Sistema internacional 10-20 para la colocación de los electrodos de electroencefalografía. . . . .	9
2.3	Vista radiológica de la localización de los electrodos subdurales. . . . .	10
3.1	Transformada de Fourier de las señales grabadas en los electrodos $C_3$ (azul) y $C_4$ (rojo) durante seis experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda. . . . .	33
3.2	Transformada de Fourier de las señales grabadas en los electrodos $C_3$ (azul) y $C_4$ (rojo) durante seis experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano derecha. . . . .	34
3.3	Transformada de Fourier de las señales grabadas en los electrodos $C_3$ (azul) y $C_4$ (rojo) durante experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda (3.3(a) y 3.3(b)) y su mano derecha (3.3(c) y 3.3(d)). . . .	35
3.4	Transformada wavelet continua de una señal sinusoidal de ejemplo. . . . .	38
3.5	Representación de las wavelets Haar $\psi_{2,0}$ y $\psi_{0,2}$ . . . . .	40
3.6	Función $f(t)$ ejemplo. . . . .	41
3.7	Base del espacio $V^{-2}$ . . . . .	42
3.8	Función $f(t)$ en función de $\phi_{-1,k}(t)$ y $\psi_{-1,k}(t)$ . . . . .	43
3.9	Función $f(t)$ en función de $\phi_{0,k}(t)$ , $\psi_{0,k}(t)$ y $\psi_{-1,k}(t)$ . . . . .	44
3.10	Transformada wavelet discreta. Primer nivel. . . . .	48
3.11	Esquema de la transformada wavelet discreta multinivel. . . . .	49
3.12	Transformada wavelet discreta de una señal ejemplo. . . . .	50
3.13	Detalle de la transformada de Fourier de las componentes obtenidas mediante la transformada wavelet discreta en el ejemplo de la figura 3.12. . .	50



3.14	Transformada wavelet discreta de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos $C_3$ (azul) y $C_4$ (rojo) durante los experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda. Mismas señales analizadas mediante la transformada de Fourier en las figuras 3.1(a), 3.1(b). . . . .	51
3.15	Transformada wavelet discreta de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos $C_3$ (azul) y $C_4$ (rojo) durante los experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano derecha. Mismas señales analizadas mediante la transformada de Fourier en las figuras 3.2(a) y 3.2(b). . . . .	51
3.16	Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de primer nivel y de detalle y aproximación de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos $C_3$ (azul) y $C_4$ (rojo) durante seis experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda. Mismas señales analizadas mediante la transformada de Fourier en la figura 3.1. . . . .	55
3.17	Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de primer nivel y de detalle y aproximación de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos $C_3$ (azul) y $C_4$ (rojo) durante seis experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano derecha. Mismas señales analizadas mediante la transformada de Fourier en la figura 3.2. . . . .	56
3.18	Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de primer nivel y de detalle y aproximación de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos $C_3$ (azul) y $C_4$ (rojo) durante experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda (3.18(a) y 3.18(b)) y su mano derecha (3.18(c) y 3.18(d)). . . . .	57
3.19	Arquitectura de preprocesamiento y extracción de características basada en la combinación de la transformada de Fourier y la transformada wavelet.	58
3.20	Matriz de datos para el ejemplo ilustrativo con 10 observaciones de tres variables de entrada. . . . .	64
3.21	Matriz de datos del ejemplo con los autovectores de la matriz de covarianza. En azul, la dirección marcada por el autovector asociado al mayor autovalor de la matriz de covarianza de los datos utilizados en el ejemplo. En verde y rojo, las direcciones de los otros dos autovectores obtenidos. . . . .	65
3.22	Representación simultánea de los datos originales, en rojo, y los recuperados mediante la transformación inversa, 3.76, en azul claro. . . . .	66
3.23	Conjunto de observaciones iniciales, en rojo, con un nuevo dato de entrada, en verde, de una clase distinta a las anteriores. . . . .	66
3.24	Representación simultánea de los valores originales del conjunto de datos de entrada y los valores recuperados después de las transformaciones explicadas.	67

3.25	Representación gráfica, líneas azules, de las distancias entre valores originales y recuperados de todos los datos. . . . .	67
3.26	Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante ACP. . . . .	70
3.27	Autovectores de la matriz de covarianza del conjunto de datos de ejemplo en el que se ha incluido el dato atípico no perteneciente a la misma clase del resto de observaciones. En azul, la dirección marcada por el autovector asociado al mayor autovalor. . . . .	71
3.28	Autovectores de la matriz de covarianza del conjunto de datos, incluido el dato atípico, calculados con el algoritmo ARCP. En azul, la dirección marcada por el autovector asociado al mayor autovalor. . . . .	73
3.29	Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante ARCP. . . . .	73
3.30	Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante MCP. . . . .	81
4.1	Arquitectura de clasificación basada en la medida de distancias entre vectores originales y recuperados mediante análisis de componentes principales. Fase de entrenamiento de los clasificadores. . . . .	87
4.2	Arquitectura de clasificación basada en la medida de distancias entre vectores originales y recuperados mediante análisis de componentes principales. Clasificación de una nueva observación. . . . .	89
4.3	Arquitectura de clasificación basada en el análisis discriminante robusto. Fase de entrenamiento de los clasificadores. . . . .	92
4.4	Arquitectura de clasificación basada en el análisis discriminante robusto. Clasificación de una nueva observación. . . . .	93
4.5	Arquitectura de clasificación basada en mínimos cuadrados parciales. Clasificación de una nueva observación. . . . .	97
4.6	Ejemplo de un conjunto de entrenamiento formado por datos de dos clases distintas ( $\omega_1, \omega_2$ ) y diferentes superficies válidas de separación. . . . .	98
4.7	Superficie de separación que maximiza el margen entre dicha superficie y los datos de entrenamiento. . . . .	98
4.8	Conjunto de datos no separable. . . . .	102
4.9	Planteamiento del problema no lineal. . . . .	103
4.10	Arquitectura de clasificación basada en una máquina de vector soporte. Fase de obtención del hiperplano óptimo de separación. . . . .	105

4.11	Arquitectura de clasificación basada en SVM. Clasificación de una nueva observación. . . . .	106
5.1	Paradigma experimental de un intento. . . . .	110
5.2	Fotografías del sistema de registro de señales EEG utilizado para grabar la base de datos de la Universidad de Alcalá. . . . .	112
5.3	Representación gráfica de la comparación de las hipotéticas arquitecturas del ejemplo descrito. . . . .	117
5.4	Alternativas analizadas para el preprocesamiento de las señales electroencefalográficas. . . . .	118
5.5	Representación gráfica de la comparación de las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> . . . . .	123
5.6	Representación gráfica de la comparación de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre <i>ACP</i> . . . . .	124
5.7	Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> para todas las series grabadas. . . . .	125
5.8	Detalle de la representación gráfica de las tasas de acierto. . . . .	125
5.9	Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> . . . . .	126
5.10	Representación gráfica de las tasas de rechazo generadas por las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> . . . . .	128
5.11	Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> con tasa de rechazo menor de 75 %. . . . .	129
5.12	Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> con tasas de rechazo menores de 75 %. . . . .	130
5.13	Comparación de las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> filtrando los resultados en función de su tasa de rechazo. . . . .	131
5.14	Representación gráfica de la comparación de la eliminación de las primeras componentes principales en la construcción de la matriz de características. . . . .	132
5.15	Representación gráfica de la comparación de las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	137
5.16	Representación gráfica de la comparación de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre <i>MCP</i> . . . . .	138
5.17	Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	139
5.18	Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	139

5.19	Representación gráfica de las tasas de rechazo generadas por las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	140
5.20	Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> con tasa de rechazo menor de 35 %. . . . .	141
5.21	Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> con tasas de rechazo menores de 35 %. . . . .	142
5.22	Estudio del número de variables latentes seleccionadas en las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	143
5.23	Representación gráfica de la comparación de las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en <i>SVM</i> . . . . .	146
5.24	Representación gráfica de la comparación de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre <i>SVM</i> . . . . .	146
5.25	Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en <i>SVM</i> para todas las series grabadas. . . . .	147
5.26	Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en <i>SVM</i> . . . . .	148
5.27	Estudio del parámetro $\gamma$ en las arquitecturas basadas en <i>SVM</i> . . . . .	149
5.28	Representación gráfica de la comparación de las mejores arquitecturas. . .	151



# Índice de tablas

3.1	Valores de las observaciones registradas para el ejemplo ilustrativo empleado en 3.3.1.3 y 3.4.1.1. . . . .	79
3.2	Resultados de <i>MCP</i> . . . . .	79
3.3	Representación de la relevancia de cada uno de los vectores latentes. . . . .	80
3.4	Resultados de <i>MCPR</i> . . . . .	82
5.1	Detalles de la base de datos de señales EEG de la Universidad de Alcalá .	112
5.2	Tasas de acierto para un ejemplo que el que se compara el rendimiento de cuatro arquitecturas frente a nueve conjuntos de datos mediante el test de Friedman. . . . .	115
5.3	Ordenación de las arquitecturas para cada conjunto de datos. . . . .	115
5.4	Resultados del test de Friedman para las tasas de acierto del ejemplo planteado. . . . .	116
5.5	Resultados del test de Friedman para las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> . . . . .	123
5.6	Resultados del test de Friedman para el análisis de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre <i>ACP</i> . . . . .	123
5.7	Resultados del test de Friedman para las tasas de acierto de las arquitecturas propuestas basadas en <i>ACP</i> . . . . .	126
5.8	% de tasas de acierto mejores del 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> . . . . .	127
5.9	% de tasas de rechazo superiores al 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> . . . . .	129
5.10	% de tasas de acierto mejores del 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para las arquitecturas basadas en <i>ACP</i> con limitación de rechazo al 75 %. . . . .	130
5.11	Resultados del test de Friedman para el estudio de la eliminación de las primeras componentes principales en la construcción de la matriz de características. . . . .	132

5.12	Resultados del test de Friedman para la comparación entre las matrices de características construidas a partir de 9 o 5 componentes principales. . . .	132
5.13	Resultados del test de Friedman para las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	136
5.14	Resultados del test de Friedman para el análisis de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre <i>MCP</i> . . . . .	137
5.15	Resultados del test de Friedman para las tasas de acierto de las arquitecturas propuestas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	138
5.16	% de resultados mejores del 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	140
5.17	% de tasas de rechazo superiores al 30 %, 40 %, 50 % y 60 % para las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	141
5.18	Resultados del test de Friedman para el estudio del número de variables latentes seleccionadas en las arquitecturas basadas en <i>MCP</i> . . . . .	142
5.19	Resultados del test de Friedman para las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en <i>SVM</i> . . . . .	145
5.20	Resultados del test de Friedman para las arquitecturas basadas en <i>SVM</i> . .	147
5.21	Resultados del test de Friedman para el estudio del parámetro $\gamma$ en las arquitecturas basadas en <i>SVM</i> . . . . .	148
5.22	Resultados del test de Friedman para el estudio del factor de coste, $c$ , en las arquitecturas basadas en <i>SVM</i> . . . . .	148
5.23	Resultados del test de Friedman para las mejores arquitecturas. . . . .	150

# Capítulo 1

## Introducción

Una breve reflexión sobre la presencia de los sistemas programables en nuestra sociedad nos llevaría con toda seguridad a destacar la inmensa importancia adquirida por éstos en todos los ámbitos de nuestra vida. Los ordenadores personales, los teléfonos móviles inteligentes o las tabletas son herramientas que, de distintas formas, se han introducido y adaptado para tratar de facilitar o hacer más eficientes todo tipo de tareas que abarcan todos los ámbitos de nuestra vida.

Sin embargo, y a pesar de la flexibilidad y capacidad de este tipo de tecnologías, su uso es, en muchos casos, excesivamente complejo y requiere conocimientos técnicos avanzados. Es en este punto donde aparece el concepto de *Interfaz persona-máquina* (*Human Computer Interface* en la literatura en inglés). El objetivo de una interfaz persona-máquina es conseguir que la funcionalidad de un dispositivo (o “máquina”) sea fácilmente accesible, y que su manejo sea lo más sencillo e intuitivo posible. La interfaz se encarga del proceso de comunicación completo entre la máquina y la persona, mostrándole a ésta última la información, comandos, órdenes, etc. disponibles en la primera y entregando a aquella las acciones de la persona, manejando en ambos casos el lenguaje apropiado para ser entendido por la máquina y por los usuarios. Dependiendo de cada caso concreto, la interfaz podría implementarse finalmente como un sencillo dispositivo electrónico (un ratón o una pantalla táctil, por ejemplo), como un programa informático (la interfaz gráfica de un teléfono móvil) o necesitaría de un sistema más complejo que abarque hardware y software de características avanzadas.

Son muchos los estudios realizados por todo tipo de empresas, fabricantes de teléfonos móviles por ejemplo, sobre la influencia de la interfaz de sus productos en la venta y utilización de éstos. De estas investigaciones se concluye, entre otras cosas, que los usuarios llegan a identificar un producto con su interfaz, obviando, o restando importancia, a parámetros o características técnicas frente a la facilidad de uso.

La interfaz de un determinado sistema se convierte, por tanto, en la puerta de entrada del usuario y en el canal de que dispone dicho sistema para entregar la información de



salida que sea necesaria. Es de esta afirmación de donde se extrae una de las características más importantes a tener en cuenta cuando se diseña una interfaz persona-máquina: ésta ha de satisfacer los requisitos impuestos por los conocimientos y capacidades que posean los potenciales usuarios.

En los últimos años han cobrado gran importancia los trabajos de investigación encaminados a la realización de interfaces persona-máquina más amigables y sencillas, especialmente las diseñadas para la ayuda a personas con algún tipo de diversidad funcional ([RL05]). Los requisitos impuestos por estos usuarios son, en general, restricciones más fuertes que las necesarias para un usuario sin diversidad funcional. Piénsese, por ejemplo, en una persona afectada por una esclerosis lateral amiotrófica, que paraliza casi la totalidad de su cuerpo, y la dificultad que supondría para esta persona el trabajo con un ordenador convencional, cuya interfaz de entrada está compuesta por el teclado y un ratón o una pantalla táctil.

Entre los dispositivos más comunes utilizados hoy en día como interfaces especialmente adaptadas se pueden enumerar los joysticks, pulsadores, el reconocimiento de habla o de ciertos tipos de movimientos generados por el usuario (generalmente cabeza o manos), la detección de movimientos de los ojos mediante la captura y análisis de señales electro-oculográficas (EOG), etc. Las características propias de cada uno de estos sistemas hacen posible su utilización por parte de determinados tipos de usuarios.

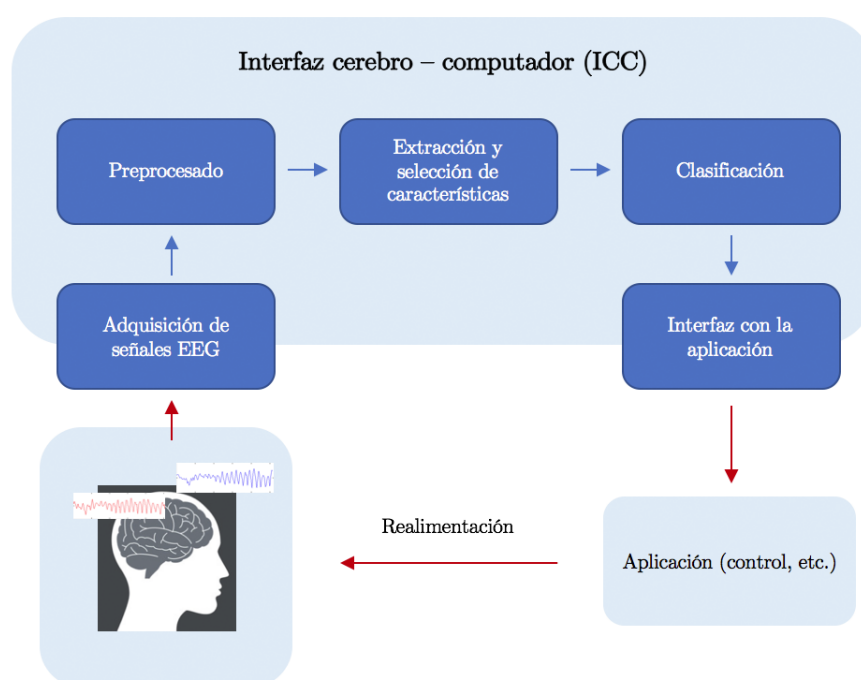
Una de las posibilidades que se viene estudiando recientemente para diseñar la interfaz entre una persona y una máquina es la utilización de **señales electroencefalográficas**. Este tipo de interfaces, conocidas genéricamente como *Interfaces Cerebro-Computadora*, *Interfaces Cerebro-Ordenador* o *Brain-Computer Interfaces*, en adelante **BCI**, pretende facilitar la comunicación entre la persona y la máquina mediante la captación de los estados, decisiones o reacciones mentales y su posterior traducción a comandos o señales de control de un ordenador. Se trata, por tanto, de una interfaz que no precisa interacción física alguna entre el usuario y la máquina y está especialmente indicada para personas con graves problemas de movilidad, bien por carecer de control sobre sus movimientos o por padecer algún tipo de parálisis muy severa o total.

La definición oficial de esta clase de interfaz fue acordada y adoptada por los participantes del primer encuentro internacional de interfaces cerebro-ordenador organizado por el Wadsworth Center perteneciente al Departamento de Salud del Estado de Nueva York en junio de 1999 (véase [WBH<sup>+</sup>00]). Según esta definición, *una interfaz cerebro-ordenador es un sistema de comunicación que no depende de los canales normales a través de los cuales el cerebro envía la información al sistema nervioso periférico y a los músculos*.

Actualmente, como se describirá en el capítulo que aborda el encuadre científico tecnológico, los trabajos de investigación en esta área están dirigidos a perfeccionar o desarrollar algoritmos de procesamiento, técnicas de clasificación, estrategias de iteración y otros aspectos involucrados en el diseño de interfaces de este tipo, con el objetivo de mejorar su

seguridad y eficacia. Como se demostrará posteriormente, el tratamiento de las señales electroencefalográficas es especialmente complicado por las características de las mismas. Son señales muy pequeñas con una relación señal ruido muy baja que, a primera vista, podrían parecer señales aleatorias. Todo el proceso, desde el registro hasta el procesamiento y la interpretación de estas señales, es muy complejo y sensible a pequeñas variaciones (estado del usuario, interferencias, modificaciones en el entorno, etc.).

El objetivo esencial de esta tesis doctoral es mejorar los resultados alcanzados hasta el momento en las distintas etapas en las que se divide una interfaz cerebro-ordenador que, como se muestra en la figura 1.1, abarcan la adquisición de las señales, su preprocesamiento, la extracción de características y la clasificación de las señales electroencefalográficas generadas voluntariamente por el usuario, etc. Con todo ello, se propondrá finalmente la arquitectura de un sistema capaz de captar y diferenciar un conjunto determinado de estados mentales o pensamientos con un alto grado de exactitud para implementar el control de una máquina.



**Figura 1.1:** Esquema general de una BCI.

Parte del trabajo llevado a cabo en esta tesis se inició dentro del proyecto “Interfaz cerebro-computadora con entrenamiento avanzado basado en realidad virtual (INTENTIO)” financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (TIC2002- 04348-C02-02) dentro del Plan Nacional de I+D+I en el que trabajaron sendos grupos del Departamento de Tecnología Electrónica de la Universidad de Málaga y del Departamento de Electrónica de la Universidad de Alcalá. El objetivo final del proyecto era el desarrollo de una BCI que integrase un completo sistema de entrenamiento para los usuarios basado en Realidad Virtual.

La estructura del documento se divide en siete capítulos que cubren la descripción de todos los estudios, propuestas y experimentos realizados. Al terminar este primer capítulo de introducción, se aborda, en el segundo capítulo, una descripción de la historia, avances y últimos logros en el campo de las interfaces persona-máquina del tipo BCI. Asimismo, se describen en detalle las distintas partes de un sistema de estas características y las propuestas más recientes realizadas por otros grupos de trabajo.

En los capítulos 3 y 4, se explican en profundidad las aportaciones de esta tesis en lo relativo a las dos fases más relevantes de una BCI: la selección y extracción de características de las señales electroencefalográficas y la clasificación de dichas señales a partir de los parámetros obtenidos.

Las contribuciones descritas en todos los capítulos anteriores se evalúan mediante un amplio abanico de experimentos descritos en el capítulo 5, a partir de los cuales, se presenta una propuesta de arquitectura para una BCI real.

El documento finaliza con un capítulo íntegramente dedicado a las conclusiones de todo el trabajo, el resumen de las aportaciones más destacadas y la propuesta de diversos trabajos para el futuro.

## Capítulo 2

# Interfaces cerebro-ordenador. Encuadre científico-tecnológico

### 2.1. Introducción

En este capítulo se aborda la descripción del estado del arte en los campos más relevantes relacionados con las BCIs.

Comienza el capítulo con una breve introducción sobre el funcionamiento del cerebro y de los últimos avances realizados en su estudio sobre los que se basa la tecnología de este tipo de interfaces.

A continuación, se describen todos los aspectos involucrados en el diseño de una BCI, destacando los estudios y experimentos realizados por importantes grupos de investigación en cada uno de dichos aspectos, resaltando las tendencias y preferencias existentes en las arquitecturas propuestas actualmente y realizando una descripción especialmente exhaustiva de los algoritmos matemáticos de procesamiento y clasificación empleados.

Finalmente, se hará una descripción de las interfaces más relevantes presentadas por los grupos de investigación citados anteriormente.

### 2.2. El cerebro

El cerebro es, probablemente, el órgano más característico del ser humano. Nuestro comportamiento y pensamiento son fruto de su actividad, que, además, integra las distintas informaciones sensoriales que terminan conformando nuestra percepción consciente.

Anatómicamente, a grandes rasgos, el cerebro es la parte más voluminosa del encéfalo y está dividido por un surco central denominado cisura longitudinal en los hemisferios izquierdo y derecho. Cada hemisferio se divide en cuatro lóbulos: frontal, parietal, temporal y occipital. El cerebro contiene varios billones de células, de las que 100.000 millones

son neuronas con casi 100 trillones de conexiones en serie y paralelo que proporcionan el sustento físico de su funcionamiento. La neurona es una unidad anatómica y funcional independiente, formada por un cuerpo celular del que salen numerosas ramificaciones denominadas dendritas, capaces de recibir información de otras células nerviosas, y de una prolongación principal, o axón, que conduce la información hacia otras neuronas.

Los avances científicos que se han producido durante los últimos cincuenta años sobre la estructura y funcionamiento del cerebro han terminado de poner de manifiesto su papel rector sobre el resto del organismo. Entre estos avances, se pueden destacar las siguientes conclusiones:

- Se han delimitado las distintas áreas de la corteza cerebral especializadas en recibir y procesar las informaciones sensoriales y controlar las reacciones musculares. Así por ejemplo, se sabe que el lóbulo occipital está especializado en el tratamiento de la información visual, la región temporal se encarga de ciertas sensaciones visuales y auditivas, los lóbulos frontales están íntimamente relacionados con la actividad motora y los lóbulos parietales con los sentidos del tacto y del gusto.
- Sin embargo, estas áreas especializadas representan apenas una cuarta parte de la corteza cerebral; el resto, las denominadas áreas de asociación, no cumplen ninguna función específica y parecen estar encargadas de interpretar, integrar y coordinar las informaciones recogidas y procesadas por las áreas sensoriales y motoras. Las áreas de asociación serían, por tanto, las responsables de las funciones mentales superiores como el lenguaje, pensamiento, razonamiento, memoria, creatividad, etc.
- Cada uno de los hemisferios controla y ejecuta funciones diferentes o aspectos diferentes de una misma función. En términos generales, parece que, en la mayor parte de las personas, el hemisferio izquierdo controla la habilidad lingüística, numérica y de pensamiento analítico, mientras que el hemisferio derecho controla las habilidades especiales complejas, como la percepción de patrones y aspectos de la ejecución artística y musical.
- Sin embargo, las actividades complejas requieren la interrelación de los dos hemisferios. Así, por ejemplo, cuando leemos un relato, el hemisferio izquierdo entiende el significado de las palabras, pero es el derecho el que capta el contenido emotivo y las imágenes utilizadas.
- Por otra parte, hay muchas funciones, principalmente de las áreas motoras y sensoriales, que parecen idénticas en ambos hemisferios. En definitiva, hay una especialización funcional, pero la actividad conjunta de ambos hemisferios es necesaria para el funcionamiento integral del cerebro.

Estas conclusiones distan mucho, como puede observarse, de explicar realmente el funcionamiento del cerebro y cómo este es capaz de crear una percepción consciente, razonar, tomar decisiones, actuar, etc.

Dada la complejidad de la actividad cerebral, son muchos y muy variados los enfoques y las disciplinas desde los cuales se puede abordar su estudio. Wolf Singer utilizó el término de Neurociencia (1985) para referirse a la ciencia que integra el conocimiento de disciplinas científicas tales como la Neuroanatomía, Neuroembriología, Neurofarmacología, Biología, Genética Molecular o las Ciencias del Comportamiento (Psicología Fisiológica, Neuropsicología y Etología entre otras), involucradas todas ellas en el estudio del cerebro.

En líneas generales, la Neuroanatomía ha dado importantes pasos tanto en la descripción celular y subcelular de los elementos responsables del funcionamiento neuronal como en el seguimiento pormenorizado de las vías de comunicación entre neuronas. En el lado contrario, la Psicología, sin embargo, es una ciencia más antigua que tiende a permanecer más inalterable. Pero, sin duda, es el espacio intermedio donde existe más desconocimiento y resulta más necesaria la investigación. Se trata de abordar la relación entre la base biológica y la funcionalidad final del cerebro, es decir, determinar cómo la Neuroanatomía es capaz de construir conocimiento, pensar, realizar acciones, etc.

Es en este espacio donde más queda por hacer, y donde se encuadra el trabajo llevado a cabo en esta tesis doctoral. Ayudados por algunos otros avances logrados los últimos años como son los realizados en el campo de la Computación y la Inteligencia Artificial o en las técnicas de registro de la actividad cerebral, es posible proponer arquitecturas relativamente complejas que discriminen y diferencien entre distintas tareas mentales o pensamientos. Conseguiremos con ello, no sólo facilitar un canal de comunicación alternativo para personas con discapacidades motoras severas, sino también, conocer un poco mejor cómo funciona nuestro cerebro.

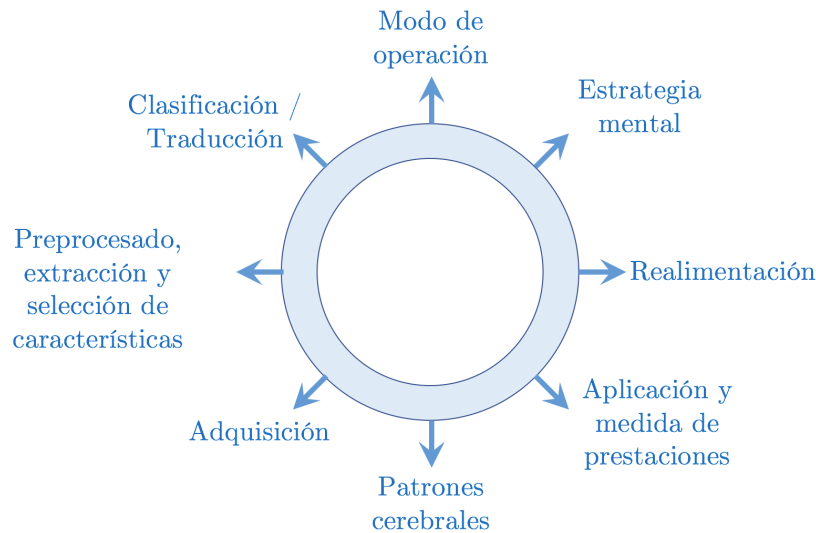
Nos encontramos ante un amplio ámbito de conocimiento e investigación, profundamente interdisciplinar, en el que quizás apenas se hayan dado los primeros pasos. Sin embargo, como quedará reflejado más adelante en este mismo capítulo, el interés creciente de la comunidad científica ya ha dado frutos que contrastan la viabilidad de este tipo de interfaces y demuestran sus posibilidades en el futuro.

## **2.3. Arquitectura genérica y características principales de una BCI**

Son muchos los aspectos a considerar cuando se pretende definir o proponer una arquitectura optimizada para una interfaz cerebro ordenador. La figura 2.1 ilustra gráficamente los más importantes que serán descritos detallada e individualmente en los próximos apartados.

### **2.3.1. Adquisición de las señales**

El primer paso en la implementación de una BCI es el registro de la actividad cerebral. Existen diversas formas de realizar esta captura y distintas señales que permiten conocer

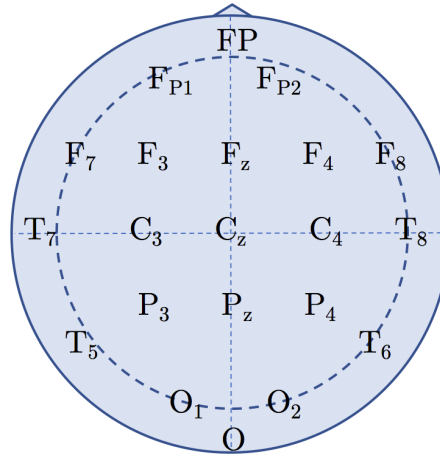


**Figura 2.1:** Aspectos más importantes que definen una BCI.

dicha actividad que serán analizadas a continuación.

Atendiendo a la técnica de registro que se utilice, las interfaces de tipo BCI pueden realizar la captación de tres formas claramente diferenciadas:

- Mediante técnicas **no invasivas**, tomando las señales en el exterior de la cabeza. Algunas de estas técnicas son:
  - El registro electroencefalográfico, el más común de estos métodos, que se realiza mediante la colocación de una serie de electrodos sobre la superficie cuero cabelludo, con un diámetro de entre 4 y 10 mm, que se ajustan a la cabeza mediante un casco o unas cintas. De esta forma, cada electrodo registra realmente la suma de la actividad de varios millones de neuronas localizadas en su proximidad. Las señales registradas forman **el electroencefalograma** (en adelante EEG), véase [Bro95], y son extremadamente pequeñas y complejas. Por esta razón, la utilidad esencial del EEG ha sido clásicamente la detección de graves patologías, distintos tipos de epilepsias, por ejemplo, cuyo efecto sobre las ondas cerebrales es evidente a simple vista. Sólo hoy en día, tras el desarrollo de potentes algoritmos de procesamiento y clasificación automáticos es posible extraer información más precisa del EEG. En cuanto a la colocación de los electrodos, ésta suele realizarse de acuerdo a una normalización ampliamente extendida denominada **sistema internacional 10-20** que se muestra en la figura 2.2.
  - La magnetoencefalografía, que registra la actividad magnética del cerebro midiendo los campos magnéticos que producen las corrientes intracelulares que recorren las dendritas. Las señales registradas mediante estas técnicas se ven menos deformadas por efecto del cráneo y el cuero cabelludo pero, en contra, tienen que ser registradas con una equipación considerablemente más cara y



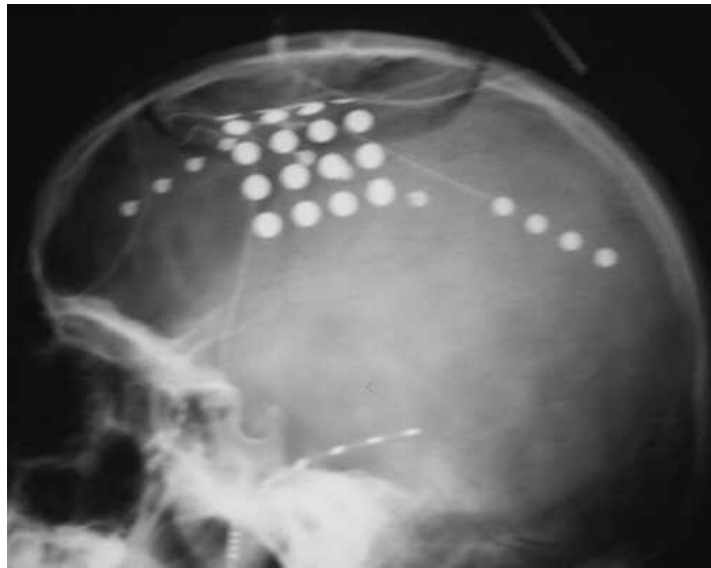
**Figura 2.2:** Sistema internacional 10-20 para la colocación de los electrodos de electroencefalografía.

voluminosa que el EEG (véanse [LSH<sup>+</sup>05] y [WSX<sup>+</sup>10]).

- La resonancia magnética funcional (fMRI por sus siglas en inglés), que localiza las áreas del cerebro que se activan al realizar una determinada tarea mental mediante la detección de los cambios en la concentración de desoxihemoglobina y, por tanto, del volumen y flujo sanguíneo en el cerebro. Una ventaja importante de esta técnica, véanse [WMB<sup>+</sup>04] y [MHG<sup>+</sup>08] por ejemplo, es la alta resolución espacial de las imágenes adquiridas pero, sin embargo, su respuesta temporal y, de nuevo, la complejidad de los equipos utilizados supone un inconveniente importante para la implementación de una BCI.
- La espectroscopia del infrarrojo cercano (o NIRS por sus siglas en inglés), que mide, como en la técnica anterior, cambios en el metabolismo y hemodinámica del cerebro, utilizando, en este caso, luz infrarroja que puede penetrar unos centímetros bajo la superficie del cráneo. Varios estudios, como [CWM07] y [PKC11], han demostrado la posibilidad de identificar tareas mentales mediante este método, aunque el retraso temporal que implican los cambios hemodinámicos en el cerebro siguen suponiendo una desventaja respecto al EEG.
- Mediante técnicas **mínimamente invasivas** (véase [LHB<sup>+</sup>00]), en cuyo caso se emplea una matriz de electrodos para el registro, denominados subdurales, que se coloca entre el cráneo y el cerebro, tal y como se muestra en la figura 2.3, y que capta la actividad de varios miles de neuronas por electrodo. Los electrodos tienen 4 mm de diámetro aproximadamente y están separados entre sí unos 10 mm. El conjunto de señales recogidas recibe el nombre de **electrocorticograma** (en adelante ECoG).
- Mediante técnicas **invasivas** (véase [KBM<sup>+</sup>00]), que monitorizan la actividad de un reducido grupo de neuronas mediante la implantación de electrodos profundos.

Entre las ventajas de las BCIs que utilizan técnicas de registro no invasivas, destacan





**Figura 2.3:** Vista radiológica de la localización de los electrodos subdurales.

su comodidad para los usuarios y el riesgo nulo de producir alteraciones en el cerebro. Sin embargo, este tipo de técnicas presentan como desventajas que las señales registradas se obtienen en realidad como suma de actividades eléctricas muy diversas que pueden no ser relevantes para analizar la actividad cerebral y que tienen una relación señal ruido muy baja.

Los sistemas mínimamente invasivos e invasivos, como los descritos en [LHB<sup>+</sup>00], [KBM<sup>+</sup>00] o [KKM<sup>+</sup>04], permiten localizar la actividad cerebral de una forma mucho más exacta, registrando señales con una resolución espacio temporal y una amplitud mucho mayor, y mejor tolerancia a ruidos y artefactos provocados por otras señales bioeléctricas (véanse [BKM<sup>+</sup>09] y [WPB<sup>+</sup>09]). Sin embargo, estos registros requieren intervención quirúrgica para la implantación de los electrodos. En el caso de los últimos, la intervención supone, además, la invasión del tejido cerebral, lo que restringe su uso a casos muy especiales, normalmente pacientes que se encuentran en fases muy avanzadas de enfermedades neurodegenerativas. Aunque se han producido avances importantes en el desarrollo de nuevos electrodos subdurales e intracorticales ([Ken89]), la implantación de éstos no es definitiva y pierden sus características transcurridos algunos meses.

En [SKMP16], puede estudiarse una comparación más detallada de estas técnicas de adquisición de las señales cerebrales.

### 2.3.2. Modo de operación

Una interfaz cerebro-ordenador puede clasificarse en función de su modo de operación como **dependiente** o **independiente** [WBM<sup>+</sup>02], y **síncrona** o **asíncrona** [MM03].

Como ya se ha definido previamente, una BCI es un sistema de comunicación en el que las órdenes enviadas por el cerebro no siguen los cauces normales a través del sistema

nervioso periférico hasta los músculos. Sin embargo, se ha desarrollado una serie de BCIs que, respetando esta definición, sí utilizan dichos cauces para generar la actividad cerebral responsable del funcionamiento de la interfaz. Este tipo de sistemas se denomina BCIs **dependientes**. Un ejemplo, descrito en [Sut92], presenta al usuario una matriz de letras que parpadean alternativamente, y el usuario realiza la selección orientando su mirada hacia la letra que desea elegir. Esta orientación de la mirada depende de los músculos que mueven el globo ocular y, por tanto, de los canales normales de transmisión que utiliza el cerebro, aunque la BCI respeta la definición dada puesto que analiza el EEG y no la posición del ojo.

Al contrario que los sistemas anteriores, las BCIs **independientes** no utilizan en modo alguno los canales normales de transmisión de información que utiliza el cerebro. Son sistemas en los que la actividad mental se genera a partir de un estímulo o pensamiento que no implica ningún movimiento por parte del usuario (véanse [FD88] y [DSW00]). En cierto modo, son estas interfaces las que satisfacen la definición de BCI de forma más amplia y las que resultan más adecuadas para personas con graves discapacidades motoras.

Para terminar de definir el modo de operación de una BCI, es necesario, además, especificar la forma en la que el usuario comienza a generar la actividad mental que provocará la interpretación de un determinado comando:

- Existen interfaces en las que el momento en el que el usuario puede comenzar a producir dicha actividad está delimitado por una excitación o señal de sincronismo con la que el sistema avisa de que está preparado para empezar y se habla en este caso de BCIs **síncronas**. Dentro de este modo de operación se diferencian a su vez dos subtipos:
  - Las interfaces síncronas con soporte para un estado especial denominado de “No Control” (en adelante NC), en las que el usuario puede decidir no realizar ninguna acción y el sistema es capaz de interpretar dicha situación.
  - Las interfaces síncronas sin soporte para este estado especial, en las que el sistema espera siempre una orden por parte del sujeto.
- También existen BCIs en las que el sistema está rastreando continuamente el EEG del usuario permitiéndole la generación de un comando en cualquier momento. Estas reciben el nombre de BCIs **asíncronas** y es imprescindible que soporten el estado NC.

En la literatura, se pretende estandarizar el uso de los términos *system-paced* para lo que aquí se ha denominado BCI síncrona con NC, *synchronized* para las interfaces síncronas sin NC y *self-paced* para las aquí denominadas asíncronas.

Sin duda, son estas últimas las BCIs que, al menos conceptualmente, permiten al usuario una mayor libertad y un control más exhaustivo. Su diseño, sin embargo, es considerablemente más complejo, ya que extraer los patrones asociados a los distintos comandos a partir de una actividad cerebral espontánea es mucho más difícil que hacerlo a partir de un instante definido por el sistema. Esto obliga a que las BCIs asíncronas implementen fuertes estrategias para evitar falsos reconocimientos, sin que ello se traduzca en un elevado tanto por cierto de comandos ignorados, como puede verse en [MM03], [MB00] y [BMB03].

### 2.3.3. Patrones cerebrales

En los primeros estudios realizados por Hans Berger, quien realizó los experimentos con electroencefalogramas humanos en 1924, ya se detectaron algunas regularidades en los registros ligadas a determinados estados mentales. El propio Berger observó, como se detalla en [Ber29], que durante el sueño las ondas cerebrales eran lentas, con frecuencias inferiores a 3 Hz, y de gran amplitud, mientras que en estado de vigilia eran más rápidas, entre 15 Hz y 25 Hz, y de menor amplitud. A partir de 1934, estas regularidades quedaron mejor definidas tras el trabajo de Edgar Adrian y Brian Matthews, [AM34]. Hoy en día, como queda ampliamente detallado en la documentación escrita sobre este tema, en [Bro95], [Bar93] y [Pob88], por ejemplo, se conocen algunos patrones y respuestas que se irán desgranando a continuación.

En primer lugar, se distinguen tres grupos de patrones descritos en la literatura (sirvan como ejemplo [WBM<sup>+</sup>02], [BECR90] y [EVG03]):

- los potenciales evocados,
- los potenciales corticales de evolución lenta,
- las oscilaciones o ritmos.

La elección entre un tipo de patrones u otro como base para el diseño de una BCI ha suscitado diversas controversias entre la comunidad científica, como puede verse en [VHT<sup>+</sup>03]. A continuación se estudian en profundidad estas alternativas.

#### 2.3.3.1. Potenciales evocados

Cuando un estímulo o tren de estímulos sensoriales de cualquier tipo llega al cerebro, provoca secuencias características de ondas en la actividad cerebral, que se denominan **potenciales evocados**, [BPS<sup>+</sup>03]. Son diferentes para cada modalidad sensorial y su variabilidad también depende de la intensidad del estímulo. Algunos de los más utilizados para la implementación de BCIs son:

- P300: se denomina así a una onda que aparece aproximadamente 300 milisegundos después de una excitación visual, auditiva o somatosensorial no periódica. Su amplitud es directamente proporcional a lo inesperado que sea el evento que la produce (véanse [FD88] y [DSW00]).
- VEP (*Visual Evoked Potentials*): son potenciales evocados producidos como respuesta a estímulos visuales rápidos. Se caracterizan por la aparición de un pico negativo 100 ms después de la excitación, seguido por un pico positivo cerca de los 200 ms posteriores al estímulo (véase [Sut92]).
- SSVEP (*Steady-State Visual Evoked Potentials*): son señales que aparecen como respuesta a estímulos visuales periódicos de determinadas frecuencias. Una excitación de la retina con una frecuencia entre 3,5 y 75 Hz, provoca la generación en el cerebro de una actividad eléctrica de frecuencia igual o proporcional (véase [MMCJ00]).
- SSSEP (*Somatosensory Steady-State Evoked Potentials*): tienen las mismas características que los anteriores, pero el estímulo es táctil y se produce por medio de un objeto que vibra en contacto con la piel (véase [MPSCP06]).

Potenciales de este tipo podrán ser la base de BCIs en las que el usuario elija las acciones o comandos mediante la selección de un determinado estímulo, asociado a dicho comando (mirando una zona concreta de una pantalla, por ejemplo). Estudiaremos algunos casos en la segunda parte de este mismo capítulo.

### 2.3.3.2. Potenciales corticales lentos

Denominados *Slow Cortical Potentials* en la literatura inglesa, en adelante SCP, estos potenciales se generan en las capas altas del córtex, presentan una evolución lenta y están relacionados con la (des)polarización de las dendritas apicales de las neuronas piramidales. Se ha demostrado, como puede consultarse en [BECR90] y [RELB82] donde se detallan en profundidad los procesos anatómicos involucrados, que los SCPs negativos se producen conjuntamente con la reducción de los umbrales de disparo de las neuronas localizadas en zonas del cerebro encargadas de las tareas motoras y cognitivas. Es decir, un nivel negativo en estos potenciales se asocia al proceso de atención, actividad o preparación mental. Al contrario, SCPs positivos aparecen al aumentar los citados umbrales de disparo de las neuronas corticales y, por tanto, se asocian con momentos de inactividad o relajación.

En la literatura, véanse [STV<sup>+</sup>06], [RBEL84] o [HSN<sup>+</sup>04], por ejemplo, se documenta ampliamente el proceso por el cual un sujeto puede aprender a dominar conscientemente estos potenciales para convertirlos en la base de una BCI, como estudiaremos posteriormente.

### 2.3.3.3. Oscilaciones o ritmos

Los registros eléctricos de la superficie del encéfalo (ECoG) y de la superficie externa de la cabeza (EEG) demuestran una actividad continua del encéfalo. La actividad eléctrica cerebral no se produce, por tanto, únicamente como respuesta a un determinado estímulo sino que es permanente y tanto su intensidad como sus patrones dependen en gran medida del nivel de excitación del cerebro (véase [Gan96]).

Esta actividad se presenta en forma de unas señales denominadas ritmos con unas características genéricas de amplitud y frecuencia distintas en función del estado mental en que se encuentre la persona. Los más importante son<sup>1</sup>:

- Ritmo alfa: es una actividad eléctrica con una frecuencia situada entre 8 y 13 Hz (denominada a su vez banda de frecuencias alfa) presente en estado de vigilia en las regiones posteriores de la corteza cerebral relacionadas con el sentido de la vista. Este ritmo aparece en el EEG normal cuando los sujetos están en reposo, relajados y con los ojos cerrados. Con un grado de reactividad variable, esta oscilación se atenúa, o incluso llega a desaparecer completamente dependiendo de los sujetos, con la actividad mental o la apertura de los párpados.
- Ritmo mu: aparece en sujetos normales con una frecuencia situada en la banda alfa pero independiente del ritmo alfa por su topografía, menos sinusoidal que dicho ritmo, y su reactividad, que se observa vinculada a los sistemas sensorial y motor. Se ha demostrado que algunos de estos ritmos mu están estrechamente ligados con algunos ritmos beta como se explicará posteriormente ([PB89]).
- Ritmo beta: oscilación de frecuencia comprendida entre 18 y 32 Hz que se asocia con momentos de actividad mental. Su amplitud es considerablemente más pequeña que los ritmos anteriores (5-10  $\mu\text{V}$  respecto a los 20-60  $\mu\text{V}$  de los ritmos alfa y mu) y aparece generalmente como actividad dominante en las regiones anteriores y centrales.
- Ritmo gamma: oscilación de frecuencia comprendida entre 30 y 90 Hz que, los estudios más recientes (véase [JK11]), relacionan con el proceso de percepción consciente, con estímulos sensoriales y algunos procesos internos tales como memoria y la atención.
- Ritmo theta: con una frecuencia situada entre 4 y 7 Hz es característico en niños o adultos en estado de estrés, frustración o desencanto. Aparece normalmente en la región parietal o temporal.
- Ritmo delta: de frecuencia menor a 3,5 Hz, está presente en el EEG de lactantes o en adultos durante estados de sueño profundo.

---

<sup>1</sup>Para un estudio exhaustivo, consúltase [Nie05] y [Mar05].

Si bien algunas BCIs empiezan a investigar la posibilidad de utilizar el ritmo gamma como base de su implementación, véase ([CIÚ+16]), la mayoría de las interfaces que emplean las oscilaciones para el estudio de la actividad mental utilizan generalmente los ritmos alfa o mu y beta. Lo hacen explorando dos fenómenos básicos a la hora de explicar la dinámica de estas señales y su relación con el funcionamiento del cerebro: ERS (*Event-related synchronization*) y ERD (*Event-related desynchronization*). Son abundantes los trabajos realizados sobre estos ritmos, como se puede comprobar en [PB89], [PA78], [PC01], [PA79], [PC97] y [PBSDS06], de los que se destaca a continuación la información más importante.

Para explicar con más detalle estos fenómenos es imprescindible aportar algún dato más sobre la generación de las señales eléctricas que se registran en un EEG o ECoG.

La descarga de una única neurona o de una sola fibra nerviosa no puede ser registrada nunca en la superficie del cuero cabelludo o del encéfalo. De hecho, como ya se ha citado anteriormente, el registro en la superficie de la cabeza capta las descargas producidas por millones de neuronas. Estas descargas pueden tener lugar sincronizadas, es decir, en fase, o desincronizadas. En el primer caso, la suma de todas las señales individuales genera una señal de amplitud apreciable, mientras que, en el segundo caso, las distintas actividades neuronales se anulan entre sí generando registros de muy pequeña amplitud. En general, la frecuencia de las señales registradas es inversamente proporcional al número de neuronas que se sincronizan.

El motivo fisiológico por el cual la actividad de las neuronas se produce de forma síncrona o asíncrona no está muy definido, aunque se relaciona con la existencia de complejas redes neuronales con lazos de realimentación y con los cambios que se producen en sus conexiones (bien por modificaciones en la membrana de las neuronas, en la intensidad de las uniones sinápticas o en las propiedades del sistema neuroquímico del cerebro) por la estimulación de un evento externo.

El término ERS (*Event-Related Synchronization*) hace referencia a la sincronización mayoritaria de la actividad neuronal de una determinada zona o componente del electroencefalograma provocada por un determinado evento o actividad mental. De forma análoga, el término ERD (*Event-Related Desynchronization*) describe la desincronización.

La importancia de estos dos fenómenos radica en su relación con diversas actividades mentales que dan lugar a distintas secuencias temporales de sincronización y desincronización en los distintos ritmos señalados con anterioridad y en las distintas zonas del cerebro. Estudiando estos patrones, sabiendo qué secuencia de ERS y ERD se genera para cada tarea mental o pensamiento y en qué lugares, se puede implementar un sistema de reconocimiento como base de una BCI.

Se ha estudiado, véase, por ejemplo, [PdS99], que el ritmo alfa sufre una amplia desincronización al realizarse tareas perceptivas, de juicio o de memoria. Se comprueba, además, que este fenómeno no es unitario y que mientras la banda inferior de frecuencias del ritmo

alfa sufre una desincronización generalizada en todo el cuero cabelludo al realizar casi cualquier tarea consciente, la banda superior de este mismo ritmo, se desincroniza de forma local y de forma selectiva con determinadas tareas mentales.

Es interesante destacar que los fenómenos de sincronización y desincronización relacionados con tareas concretas, no sólo se producen al ejecutar dichas tareas, sino también durante los instantes previos en los que el cerebro está preparando su realización ([PLdS05]).

Por ejemplo, se ha comprobado que la preparación, planificación y ejecución de un movimiento provoca una desincronización de corta duración de los ritmos mu (banda superior) y beta (banda inferior) sobre el área motora del cerebro. Las primeras investigaciones realizadas por Jasper y Penfield ([JP49]) fueron confirmadas por Pfurtscheller y Aranibar posteriormente con la propuesta, además, de un método de medida de la ERD ([PA78] y [PA79]). La desincronización comienza sobre la región contralateral al movimiento unos 2 segundos antes de su realización y se vuelve bilateral al ejecutarlo. En caso de realizar un movimiento con la mano dominante, el ERD será muy pronunciado sobre la región contralateral y muy suave en la ipsilateral, mientras que al realizar el movimiento de la mano no dominante, ambas desincronizaciones aparecerán menos lateralizadas.

Cabe destacar, además, por su importancia a la hora de implementar una BCI destinada a personas con graves discapacidades físicas, que estos patrones observados al realizar un movimiento aparecen de forma similar al imaginarlo. Como ya se preveía por estudios realizados anteriormente sobre las estructuras que conciernen a la ejecución y a la imaginación de los movimientos, se demuestra que la desincronización de los ritmos mu y beta sobre la región contralateral al movimiento imaginado son muy similares a los producidos por el movimiento real (véase [PLdS05]). El entrenamiento permite, además, acentuar la sincronización y desincronización para hacerlas más evidentes, como se documenta ampliamente en [WBM<sup>+</sup>02].

Finalmente, fruto de la complejidad de la actividad cerebral y de la estrecha dependencia del individuo concreto que se estudie, se puede afirmar que estos fenómenos y patrones, aun estando muy generalizados, no se presentan ni de la misma forma ni con las mismas características en todos los individuos. En algunos cambian las frecuencias de las distintas bandas relevantes, en otros, las secuencias temporales de ERD y ERS y en otros la propia presencia de estos efectos. Por tanto, las BCIs basadas en estos patrones deberán prever en su entrenamiento esta variabilidad.

#### 2.3.4. Estrategia mental

Bajo este epígrafe se describen las distintas acciones que los usuarios deben realizar para controlar una BCI. Evidentemente, la estrategia mental, a la que también nos referiremos como estrategia experimental o de control, que el sujeto debe ejecutar depende de los patrones cerebrales utilizados por una BCI concreta.



Para comenzar, se pueden clasificar estas estrategias en tres grupos importantes:

- Un primer grupo correspondería a las estrategias relacionadas con el **condicionamiento operante**. En psicología, este término describe una forma de aprendizaje en la que la consecuencia (el estímulo reforzador) es contingente a la respuesta que previamente ha emitido el sujeto. Expresado en los términos de un diccionario de Psicología (véase [Ech08]): *El condicionamiento operante pone al sujeto en una situación en la que alguna de sus conductas provoca la aparición de un refuerzo; como consecuencia de la presencia del refuerzo se produce en el sujeto una modificación en la probabilidad de la emisión de dicha conducta. Con el condicionamiento operante, el sujeto aprende a conseguir algo, bien eliminar una situación perjudicial u obtener algo beneficioso*. Mediante este tipo de técnicas, diversos estudios mostraron que algunos monos eran capaces de controlar las descargas de neuronas aisladas de la corteza motora de su cerebro ([FF75], [WB78] y [WBR79]). Posteriormente, algunos grupos de investigación han utilizado técnicas de este tipo consiguiendo que algunos sujetos puedan controlar la amplitud de su EEG, la tasa de excitación de las neuronas corticales o los potenciales corticales de evolución lenta e implementando, con ello, BCIs (véanse [Nie05], [TKK75] y [Kuh78]).
- Un segundo grupo de estrategias de control está basado en que los usuarios **fijen su atención** sobre una determinada excitación externa (algunos ejemplos se describen en [Sut92], [MMCJ00] y [Sut84]). En este caso, se utilizan como patrones cerebrales los potenciales evocados. Valga como ejemplo un matriz de letras que parpadeasen todas y cada una de ellas a una frecuencia distinta. El potencial visual evocado cuando el usuario fije su atención sobre una determinada letra será distinto del que aparecería con cualquiera otra y, por tanto, bastaría para reconocerla.
- Finalmente, existe un tercer grupo de estrategias mentales que consisten en **imaginar** una determinada acción o tarea. La estrategia más utilizada dentro de este grupo es la imaginación motora o imaginación de un movimiento, cuyos efectos sobre las señales cerebrales ya se han destacado anteriormente. Incluso cuando el movimiento no llega a realizarse finalmente, las oscilaciones cerebrales permiten distinguir entre diferentes movimientos imaginados. Dentro de esta categoría de estrategias, se sigue investigando sobre la utilización de otras tareas mentales como las operaciones matemáticas, la imaginación espacial o tareas relacionadas con el habla, como puede comprobarse en [MRMG04b].

### 2.3.5. Realimentación

La realimentación facilita información a los sujetos sobre la clasificación que la BCI está realizando en cada momento a partir de las señales electroencefalográficas del individuo.



Un correcto aprendizaje de las funciones cerebrales más básicas como hablar o moverse, y de otras más complejas como pueden ser cantar o bailar requiere desde el inicio de su aprendizaje una realimentación a través de los sentidos. Cuando aprendemos a hablar lo hacemos escuchándonos a nosotros mismos y comparando esa realimentación con lo que oímos a quienes nos rodean (véanse [SSW84] y [GK00]). Durante toda nuestra vida, seguimos necesitando esa realimentación para mantener nuestras habilidades.

El uso de una BCI no difiere en este sentido de estas habilidades adquiridas desde nuestro nacimiento. El objetivo final de una BCI es sustituir el canal habitual que, mediante el uso de los músculos, comunica el cerebro y el entorno. Por tanto, el éxito de un sistema que utilice una BCI dependerá también de la realimentación y de la adaptación cerebral del usuario al tipo de tarea mental que se requiera en función de dicha realimentación. Como ha sido ampliamente demostrado, el uso de algún tipo de realimentación mejora considerablemente tanto la fase de aprendizaje como la propia utilización de una BCI (véanse [Ros90], [PLK<sup>+</sup>06] y [CR95]).

La realimentación puede ser:

- discreta o continua,
- unidimensional o multidimensional,
- real o virtual.

En caso de utilizar una realimentación discreta, ésta puede darse en forma de un número, una letra, un icono o incluso un sonido. Si se elige una realimentación unidimensional continua, suele realizarse comúnmente mediante la representación de una barra en la pantalla de un ordenador. Para representaciones más complejas que aporten mayor información al usuario, pueden emplearse sistemas continuos de dos dimensiones como juegos del estilo de un punto desplazándose hacia una canasta que puede cambiar de lugar, o sistemas de realidad virtual en tres dimensiones.

### 2.3.6. Procesamiento de señal

Una vez adquiridas las señales, sean éstas del tipo que sean, correspondientes al tipo de BCI elegida en función de las características seleccionadas entre las descritas anteriormente, comienza el proceso algorítmico necesario para traducir dichas señales en acciones.

El primer paso de este procedimiento consiste en procesar las señales adquiridas para obtener de ellas la información relevante. Las señales digitalizadas llegan a este punto mezcladas con otras señales biológicas o señales externas que camuflan la información importante y suponen ruido. Llamaremos características a los parámetros que se extraen de las señales y que se presume contienen esta información relevante del EEG adquirido.

Dichas características se convierten posteriormente en la entrada de los algoritmos de traducción o clasificación que constituyen la última parte de la BCI y que deciden finalmente qué acción corresponde a las señales registradas.

Tras la experiencia acumulada en los estudios realizados en los últimos años por parte de los diversos grupos de investigación que han venido trabajando en este campo, los objetivos esenciales fijados para esta etapa del proceso se centran en lograr que el sistema sea:

1. Preciso:

- Alcanzando un determinado grado de acierto en los comandos generados.
- Siendo suficientemente robusto ante interferencias provocadas por el entorno o por señales biológicas ajenas a la actividad mental.
- Proporcionando una arquitectura estable que sea fiable en distintos momentos, distintos días o, incluso, para distintos usuarios.

2. Rápido:

- Generando los comandos en un período de tiempo reducido.
- Con un tiempo de computación pequeño.
- Requiriendo pocos recursos de almacenaje, memoria, etc.
- Sin necesidad de esperar a que la señal se presente limpia y sin artefactos.
- Con un tiempo de entrenamiento pequeño y una cantidad de datos razonable.

3. Interpretable:

- Pudiéndose explicar el camino seguido por la interfaz para generar un determinado comando.
- Tomando decisiones sobre el conocimiento que se tiene sobre el funcionamiento del cerebro o contribuyendo a la ampliación de dicho conocimiento.
- Con algún tipo de visualización intuitiva que pueda facilitar una realimentación en tiempo real.

4. Práctico:

- Con un coste asequible.
- Portátil en la medida de lo posible.
- De código abierto.
- Con una configuración sencilla para el usuario final.
- Discriminando finalmente entre múltiples tareas mentales.
- Automatizado para reducir al máximo el esfuerzo necesario por parte del usuario para su utilización.

Estudiaremos, a continuación, diversas técnicas utilizadas en la actualidad tanto para extraer las características como para clasificar las acciones.

### 2.3.6.1. Extracción y selección de características

Desde que Hans Berger grabase los primeros electroencefalogramas, la inspección visual de los mismos, de forma no procesada, ha sido el método más utilizado en la comunidad médica para su estudio. La observación minuciosa de estas señales permite localizar ritmos inesperados que indican la presencia de focos epilépticos o daños cerebrales. Sin embargo, esta inspección difícilmente puede dar información más detallada a niveles de discriminación de estado mental o de diferenciación de zonas activas en el cerebro.

El análisis automático de las ondas cerebrales se basa, como en el caso de cualquier otra señal, en el estudio de la variación de su frecuencia, fase y amplitud. Desde los primeros intentos de procesamiento de estas señales, las técnicas desarrolladas se han centrado en el estudio de alguno de estos parámetros de forma individual. En los últimos años, sin embargo, se han desarrollado técnicas multiresolución que permiten estudiar simultáneamente varios de los parámetros citados anteriormente, así como su interrelación.

A continuación, se detallan algunas de estas técnicas de extracción de características, de acuerdo a la clasificación y al compendio realizado tras el Tercer Encuentro Internacional sobre Tecnología de BCIs que tuvo lugar en junio de 2005 en el Instituto Rensselaerville, en Estados Unidos (véanse [MAM<sup>+</sup>06] y su versión más detallada en [And05]).

En función de esta clasificación podemos dividir estas técnicas en los siguientes grupos:

1. Filtrado inicial. Como ya se ha comentado anteriormente, la observación de las señales electroencefalográficas en la superficie del cuero cabelludo supone trabajar con relaciones señal ruido muy bajas y recoger en cada electrodo, no sólo la actividad de las neuronas situadas en la zona donde esté colocado, sino también otras actividades circundantes que no tienen información relevante. Con el fin de mejorar la definición temporal, espacial y espectral de las señales recogidas, la literatura describe el uso de algunas técnicas de filtrado que se citan brevemente a continuación.
  - a) Promediado de varios intentos en caso de BCIs síncronas.
  - b) Filtrado espacial:
    - Realizando una grabación por voltajes diferenciales o filtrado bipolar, ampliamente utilizado en la mayoría de los estudios, que consiste en recoger la información de cada canal como diferencia de voltaje entre dos electrodos en lugar de hacerlo respecto a una referencia común.
    - Utilizando una referencia común promediada (*CAR* por sus siglas en inglés) donde cada canal se obtiene como la resta de la tensión obtenida en cada electrodo menos la media de todos ellos.

- Empleando un filtro de Laplace sobre los voltajes de electrodos cercanos (véanse [LBCM05], [WM04], [MW05], [KLH05], [QDH04] y [KSMW05]), tomando los distintos canales como la diferencia de la tensión medida en un electrodo menos el promedio de las tensiones de los electrodos vecinos.

c) Filtrado espectral:

- Utilizando un filtro paso banda en la banda activada por la acción mental empleada.
- Haciendo uso de un filtro Notch (o de muesca) para eliminar la componente frecuencial en 50 o 60 Hz.

Una vez tomadas las señales de los canales seleccionados para un determinado tipo de interfaz, se procede a extraer las características que permitan discriminar las tareas mentales realizadas tal y como se explicaba anteriormente. Para ello se han probado y documentado diversas técnicas que se citan a continuación con las referencias convenientes para poder ser estudiadas con mayor profundidad.

2. Técnica de análisis de amplitud (véase como ejemplo [BDS<sup>+</sup>03]).

3. Técnicas de análisis de frecuencia:

- Transformada de Fourier (pueden encontrarse algunos ejemplos en [LBCM05], [MRMG04a] y [PCFP97]).
- Transformada de Fourier inversa (utilizada en [BDS<sup>+</sup>03]).
- Filtro adaptado (cuyo uso se muestra en [KSMW05]).
- Transformada wavelet (utilizada en [RTM03] para eliminar el ruido producido por el EOG).
- Análisis autorregresivo univariable o multivariable (véanse [ASS98] y [FBFSF<sup>+</sup>09]).

4. Técnicas de transformación del espacio de muestras:

a) Por maximización de la varianza:

- Proyección sobre las componentes de mayor varianza haciendo uso del análisis de componentes principales (valgan como ejemplos [FBRB04] y [GLO<sup>+</sup>05]).
- Patrones espaciales comunes (consúltense [LGG04] y [DBCM04]).
- Descomposición por valores singulares (SVD) de muestras multicanal retardadas (utilizado en [AK03]).

b) Utilizando estadísticos de mayor orden:

- Análisis de componentes independientes (véanse [KLH05] y [QDH04]).

### 2.3.6.2. Traducción de características

En este segundo gran bloque dentro de los algoritmos de procesamiento de señal de las BCI, se abordan las técnicas más utilizadas actualmente para clasificar o, como se propone también en la nomenclatura de este tipo de interfaces, para traducir las características extraídas en la etapa anterior en los comandos que corresponden a dichas características.

#### 1. Técnicas lineales:

- a) Discriminante lineal (utilizado ampliamente en trabajos como [CSP99], [KA03] [DBCM04] y [VKBS09]).
- b) Perceptrón (véase [LGG04]).
- c) Regresión (consúltense [LBCM05] y [WM04], [MW05], [GLO<sup>+</sup>05] y [KSMW05]).

#### 2. Técnicas no lineales:

- a) Con estructura fija:
  - Discriminante cuadrático ([CSP99], [SLP97]).
- b) Con estructura variable:
  - k vecinos más próximos (véanse [FBRB04] y [KA03]).
  - Máquinas de vectores soporte (SVM) (utilizadas en [RTM03], [ZGW08] y [FBFSF<sup>+</sup>09]).
  - Mínimos cuadrados parciales (PLS) ([RTM03]).
  - Redes neuronales artificiales ([AS96]).
  - Árboles de decisión ([KA03]).
  - *Learning vector quantization* ([PCFP97]).
  - Mezcla de gaussianas ([MRMG04a]).
  - Modelos ocultos de Markov ([OGCP01]).

### 2.3.7. Aplicación y medida de prestaciones

#### 2.3.7.1. Aplicación

Las aplicaciones de las BCIs pueden ser múltiples. Se destacan, a continuación, algunas de ellas, especialmente relevantes por encontrarse en fase de investigación o desarrollo en la actualidad:

- Control de dispositivos de comunicación alternativa como comunicadores, teclados virtuales o sistemas de deletreo. Estas interfaces, pensadas para personas con graves discapacidades motoras que llegan a impedir el habla, permitirían la escritura o selección de mensajes en un dispositivo adecuado (que puede ser un ordenador personal) para su posterior reproducción por medio de un sintetizador de voz o su integración

en correos electrónicos, sistemas de comunicación básicos, programas de edición de texto, etc. (véase [WMNF91b]).

- Control de sistemas FES (*Functional Electrical Stimulation*) que permiten que un usuario tetrapléjico pueda estimular los nervios motores de sus extremidades y realizar de esa forma algunos movimientos (véase [MPSPR05]).
- Terapias basadas en la biorrealimentación consistentes en la observación de valores de distintas señales biológicas (como la respiración, frecuencia cardíaca, presión arterial, temperatura cutánea o la tensión muscular), para aprender cómo modificar estas funciones mediante la relajación o la fijación en la mente de imágenes placenteras. En el caso particular de las BCIs, podrían llegar a controlarse episodios epilépticos detectando con antelación las fases previas a su aparición.
- Rehabilitación y entrenamiento cognitivo como los proyectos BCI-Ageing del consorcio formado por la Universidad de Valladolid y el CSIC o Brain-Computer Interface(BCI)-Based Rehabilitation del Centro Nacional para las Tecnologías Neuroadaptativas del Estado de Nueva York (véase también [BCTALL<sup>+</sup>17]).
- Manejo de dispositivos de realidad virtual.
- Control de robots móviles y conducción de sillas de ruedas.

#### 2.3.7.2. Medida de prestaciones

La medida de las prestaciones de una BCI no es un concepto sencillo ni ha sido suficientemente estandarizado todavía, aunque existen propuestas consensuadas como las referidas en [MKH<sup>+</sup>06]. Es importante definir algún tipo de métrica más o menos generalizado en cuyo marco sea posible comprobar y comparar los resultados obtenidos.

Antes de abordar el estudio de las métricas más generalizadas, es importante destacar que no se puede definir una métrica sin tener en cuenta la aplicación final de la interfaz que se esté analizando. La calidad de una interfaz síncrona aplicada a la escritura de un texto mediante una matriz de letras que se van recorriendo secuencialmente puede valorarse, por ejemplo, contabilizando el número de decisiones erróneas que se toman. Sin embargo, en una interfaz asíncrona que controla una silla de ruedas e implementa un sistema de rechazo de comandos para mayor seguridad, quizá no se tome ninguna decisión errónea, pero dependiendo del umbral de certidumbre que se ponga, se dejen de tomar muchas decisiones correctas.

A la hora de analizar las prestaciones de las interfaces síncronas, en la literatura existente se utilizan principalmente las siguientes métricas (extraídas en su mayoría de los métodos estadísticos comunes):

- La **exactitud** o la **tasa de error**, medidas como el tanto por ciento de aciertos o errores cometidos en la clasificación.

- Las **curvas ROC** (*receiver-operator-characteristics*), que representan gráficamente la relación entre la sensibilidad y la especificidad de un clasificador binario o las **matrices de confusión** que presentan, de forma tabular, una información equivalente a las curvas ROC para un número mayor de clases.
- El **coeficiente Kappa de Cohen**, véase [Coh60].
- La **información mutua**, cuya aplicación concreta a este tipo de clasificadores puede estudiarse en [SKSP03] y [SCP02].
- La **tasa de transferencia de información (ITR)**, medida en bits por minuto (bpm) en la mayoría de los casos y descrito inicialmente en [WMV00].

La evaluación de las interfaces asíncronas es más compleja y carece de interés para el desarrollo de este trabajo, pero para un estudio en profundidad puede consultarse [MKH<sup>+</sup>06].

## 2.4. Estudio de algunas interfaces ya existentes

En el último apartado de este capítulo se describirán algunas de las interfaces desarrolladas por los grupos de investigación más relevantes en este campo, sintetizando los aspectos más destacados de la combinación de elementos que se emplea en cada una.

### 2.4.1. Graz BCI

La Universidad Tecnológica de Graz lleva más de 25 años investigando en el campo de las BCIs ([PMPS<sup>+</sup>06]). Ha desarrollado hasta el momento distintas estrategias para poder implementar varias interfaces cuyas características se detallarán a continuación.

Como características comunes, este grupo ha tomado siempre como punto de partida la utilización de la señal EEG registrada en la superficie del cuero cabelludo para el desarrollo de sus BCIs. En un principio trabajaron enfocados hacia el desarrollo de interfaces síncronas e independientes que requerían un breve entrenamiento por parte del usuario y del sistema. Este grupo es uno de los principales precursores del uso de la imaginación motora (imaginación del movimiento de la mano izquierda o derecha y de los pies) como estrategia mental, tomando las señales recogidas en los electrodos  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_z$  (del sistema internacional 10-20 ya citado) como información de entrada para la interfaz (véanse entre otras [PdS99] y [PLdS05]).

En cuanto a los algoritmos de extracción de características y traducción, el grupo de Graz ha desarrollado varias alternativas con resultados satisfactorios:

1. En una primera versión cuyos detalles pueden consultarse en [FPC<sup>+</sup>94] y [PCG<sup>+</sup>00], la extracción de características se realiza mediante la **estimación de potencia por**

**bandas de frecuencia** con una clasificación basada en un modelo de **cuantificación del vector de aprendizaje**, más comúnmente conocido por su denominación en inglés “*learning vector quantization*” (véase [Koh90]).

La potencia de cada banda se calcula realizando un filtrado paso banda previo, elevando al cuadrado el valor de cada muestra y promediando varias muestras consecutivas. La amplitud espectral exacta de cada banda ha de optimizarse para cada usuario con un entrenamiento previo, pero está relacionada con los ritmos alfa y beta. Este algoritmo y sus distintas optimizaciones posteriores responden y reflejan en realidad las secuencias de sincronización y desincronización (ERS y ERD) estudiadas en el apartado 2.3.3.3 como se justifica en [PdS99].

Una vez obtenidas las estimaciones de potencia, una por cada canal y banda cada 250 ms, la información correspondiente a 1 segundo completo se introduce en una red neuronal LVQ que traduce las características a 5 posibles clases que representan distintos grados de seguridad en el reconocimiento de dos tareas mentales. Las redes neuronales LVQ son redes de aprendizaje competitivo que delimitan regiones o clases (el número de clases que el programador seleccione) en el espacio de los datos de entrada, basándose en el cálculo de distancias euclídeas entre los datos y algunos vectores seleccionados inicialmente como vectores de referencia (véase [KKLT92]).

Este es uno de los pocos casos reflejados en la literatura en los que consta el uso de una red neuronal de este tipo para la clasificación de tareas mentales. La técnica mayoritariamente utilizada es la de redes neuronales del tipo perceptrón multicapa, entrenado con el algoritmo de aprendizaje de propagación del error hacia atrás o *error backpropagation* en la terminología anglosajona. Así lo confirman trabajos como los documentados en [CSS95], [WM94] o [PPF01].

Con esta arquitectura, se alcanzan tasas de error mínimas de hasta el 10 % con realimentación discreta retardada que se muestra al usuario al final del experimento.

2. El grupo de investigación de la Universidad de Graz desarrolló una segunda arquitectura basada en la extracción de características mediante la **estimación de parámetros autorregresivos** y la clasificación mediante técnicas de **análisis discriminante lineal**.

Utilizando un algoritmo autorregresivo, el EEG se modela como un proceso estocástico en el que el valor de la señal de cada electrodo en un determinado instante  $t$  viene dada por la ecuación 2.1:

$$Y_t = a_{1,t}Y_{t-1} + a_{2,t}Y_{t-2} + \dots + a_{p,t}Y_{t-p} + E_t \quad (2.1)$$

Para obtener mejores resultados, el algoritmo propuesto por el grupo de Graz permite una lenta variación en el tiempo de los parámetros  $a_{1,t}$ ,  $a_{2,t}, \dots$ ,  $a_{p,t}$ , que se calculan



mediante un algoritmo de mínimos cuadrados promedio (LMS). Las ecuaciones de cálculo y actualización de estos parámetros pueden estudiarse en [SLP97] y [PCSL98].

En esta propuesta se presenta el concepto de adaptabilidad en el diseño de una BCI. La variabilidad de la señal EEG, incluso la de un mismo sujeto en instantes relativamente cercanos en el tiempo, requiere la utilización de algoritmos adaptativos, capaces de variar en el tiempo, si se pretende obtener una BCI con resultados estables.

En esta arquitectura, la clasificación se realiza mediante un sencillo análisis discriminante lineal cuyos fundamentos se detallan en [PCSL98] y [Bis95].

A lo largo de los últimos años, este grupo de investigación ha experimentado con diversas aplicaciones de esta BCI basada en los ritmos sensorimotrices registrados para diversas tareas mentales relacionadas con la imaginación del movimiento de las extremidades como son el control de una prótesis FES ([MPSPR05]) o un sistema de comunicación alternativa ([SLBP05], [SBW<sup>+</sup>15]).

Actualmente el grupo trabaja en la decodificación del movimiento y de la imaginación del movimiento para tratar de traducir, no sólo una serie de tareas mentales en comandos, sino la intención de realizar una acción en la secuencia de comandos que lleva a una prótesis a realizar dicha acción de manera completa como se detalla en [MPSP016].

#### 2.4.2. Berlin BCI

El Instituto de Arquitectura de Computadores y Tecnología del Software de Fraunhofer en Berlín ha trabajado sobre la base del desarrollo de una BCI denominada BBCI (Berlin BCI) de carácter no invasivo, con una estrategia mental basada en el movimiento (dedos de las manos, manos, pies, etc.), un espacio de características de dimensión bastante superior a las interfaces anteriores (64, 118 ó 128 electrodos dependiendo del experimento) y apoyada en avanzadas técnicas de aprendizaje automático, véase [BDK<sup>+</sup>06].

Los trabajos previos (documentados en [BDS<sup>+</sup>03]), se basaron en la grabación y estudio de las señales de varios sujetos mientras realizaban un movimiento con un dedo similar a la pulsación de una tecla. Tomando las señales de 64 electrodos del EEG, estudiaron dos tipos de patrones cerebrales:

- los parámetros ERD y ERS ya descritos, y
- el potencial de preparación, en adelante RP (“*readiness potentials*” o “*Bereitschaftspotential*” en inglés y alemán respectivamente), descrito originariamente por Kornhuber y Deecke y presentado en [KD65]. El RP se produce por una respuesta postsináptica de las neuronas pericentrales piramidales y tiene, al igual que ERD y ERS, un comportamiento conocido y relacionado con los movimientos voluntarios. Concretamente en el caso del movimiento de los dedos citado anteriormente, el RP se

vuelve negativo durante la fase de preparación del movimiento y presenta un mínimo abrupto instantes antes de su ejecución. Los estudios realizados muestran un comportamiento similar, aunque mucho más suavizado, de este potencial, cuando el movimiento es sólo imaginado o en el caso en el que el sujeto presente una amputación que le impida realizar finalmente el movimiento.

En los primeros estudios realizados, se demostró que era posible predecir el movimiento en función de estos potenciales con una tasa de error de entre el 5 % y el 20 % dependiendo de la velocidad a la que realizara la acción.

Para los experimentos en los que se utilizó el RP como patrón cerebral, la técnica de extracción de características consistía en realizar la transformada de Fourier de los datos recogidos, filtrar las frecuencias superiores a 4 Hz., realizar la **transformada de Fourier inversa** y, trabajando con los últimos de 200 ms de las señales, promediar los valores de ventanas de 50 ms. sin superposición obteniendo, por tanto, 4 valores por cada canal cada 200 ms. La clasificación se realizaba mediante **regresión sobre mínimos cuadrados promedio** equivalente a un análisis por discriminante lineal o un discriminante de Fisher. El estudio completo puede consultarse en [BDS<sup>+</sup>03].

En el caso de los experimentos que utilizaban ERD y ERS, el proceso no distaba mucho del utilizado por el grupo de la Universidad de Graz, incluyendo en este caso el uso de **patrones espaciales comunes** (CSP) en la extracción de características con el posterior **análisis por discriminante lineal** como se describe en [DBCM04].

Como consecuencia de los resultados obtenidos, y tal y como se detalla también en [DBCM04], el grupo de investigación de Berlín, propuso una arquitectura combinada en la que se utiliza RP y ERD con la extracción de características ya comentada y un **clasificador lineal optimizado** para la suposición de que ambos tipos de características fueran completamente independientes. El diseño definitivo de la interfaz utilizaba 118 señales tomadas de igual número de electrodos y se apoyaba más en la modulación de las oscilaciones cerebrales generadas al imaginar los movimientos de las manos y los pies que en el RP (decisión que se justifica en [Dor06]). Los experimentos se realizaron con realimentación y utilizando como aplicación el desplazamiento de un cursor, su posicionamiento o el juego de la canasta. Para reducir al máximo la fase de entrenamiento de los usuarios, los parámetros de la arquitectura se ajustaron de forma previa por parte de los investigadores tras la grabación de un número mínimo de intentos. Los resultados obtenidos pueden consultarse [BDK<sup>+</sup>05].

En la actualidad, véanse [BTV<sup>+</sup>10] y [BAD<sup>+</sup>16], el grupo de investigación ha dirigido sus esfuerzos hacia aplicaciones externas al campo de la medicina como la monitorización del estado mental de un conductor, la sobrecarga de trabajo de un operario o la medida de la calidad sin renunciar a la investigación de los aspectos pendientes en la interacción persona-máquina.

### 2.4.3. Wadsworth BCI

En último lugar, dentro de este repaso a algunas BCI que se ha realizado en este capítulo, se presenta la interfaz desarrollada en el Laboratorio de Desórdenes del Sistema Nervioso en el Centro Wadsworth dependiente del Departamento de Salud y de la Universidad del estado de Nueva York situado en Albany, Nueva York, refundado hoy como Centro Nacional para Neurotecnologías Adaptativas.

Este grupo es, junto con la Universidad de Graz, otro de los pioneros en la investigación sobre BCIs. Como los primeros, centraron sus esfuerzos en desarrollar una interfaz no invasiva, síncrona y no dependiente, basada en la capacidad de los usuarios para controlar la amplitud de los ritmos  $\mu$  y  $\beta$  en la zona motora del cerebro (véanse [WM04], [WM94], [WMNF91a]). Los usuarios aprendían a variar la amplitud de dichos ritmos partiendo inicialmente de la imaginación de un movimiento y algunos conseguían alcanzar, incluso, tras varias sesiones de entrenamiento, la capacidad de controlar dichas señales de forma más automática e inconsciente.

Como se describe en [KSMW05], [WMV00], [WMNF91b] y [MSVR00] la adquisición de señales se realizaba bien tomando únicamente dos señales con un montaje laplaciano amplio o bien tomando 64 canales y utilizando dos de ellos con una referencia media común generada por el resto (CAR). En ambos casos, se analizaban períodos de 400 ms. de cada señal solapados cada 40 ms. En cuanto a la extracción de características, el primer modelo utilizaba un **filtro adaptado** ajustado en la frecuencia del ritmo  $\mu$  (véase [KSMW05]), mientras que el segundo realizaba un **análisis espectral autorregresivo** de orden 16 (véanse [WBM<sup>+</sup>02] y [WM04]). En la primera arquitectura, la traducción se realizaba mediante una **ecuación lineal con coeficientes adaptativos**, mientras que en el segundo caso se utilizaba una **regresión lineal múltiple** para clasificar.

La característica esencial de la interfaz de Wadsworth en cualquiera de sus alternativas es que ha sido una de las primeras en permitir algo más que la toma de una decisión binaria (sí o no, arriba o abajo, etc.) implementando la generación del desplazamiento de un cursor en dos dimensiones (véase [FMWP04]). Las amplitudes de los desplazamientos horizontales y verticales venían dadas por dos clasificadores independientes como los descritos más arriba. El usuario aprendía a controlar los ritmos  $\mu$  y  $\beta$  de acuerdo esencialmente a un condicionamiento operante (véase apartado 2.3.4).

En la actualidad, el grupo de Wadsworth ha centrado sus investigaciones en la evaluación de la posibilidad de trabajar con potenciales evocados y, más concretamente, con la señal P300 para la implementación de una nueva BCI, como se introduce en [SKMW05], [SD06] y se describe en [MHM<sup>+</sup>15]), al tiempo que desarrolla diversos trabajos sobre una BCI invasiva basada en señales electrocorticales (ECoG), como se describe en [LSW<sup>+</sup>04] [ABS<sup>+</sup>12] o [DBG<sup>+</sup>15].

## Capítulo 3

# Arquitectura de preprocesado, extracción y selección de características de las señales EEG

### 3.1. Introducción

En este capítulo se aborda el estudio realizado en este trabajo de investigación sobre la fase de preprocesado, extracción y selección de características de una BCI. En dicho estudio, se han analizado en profundidad diversas técnicas de análisis de señal y sus posibles combinaciones, se ha examinado la influencia de sus posibles parametrizaciones y se han llevado a cabo un amplio grupo de experimentos hasta proponer la arquitectura óptima para esta fase de una BCI.

La principal dificultad de esta etapa se centra en poder reconocer las características adecuadas que permitan una posterior traducción óptima. Como se ha justificado anteriormente, la señal electroencefalográfica no presenta un patrón fácilmente reconocible, lo que dificulta esta tarea. Además, en el caso de una interfaz basada en la imaginación mental y en las oscilaciones cerebrales ya explicadas, como es el caso de este trabajo, no es fácil delimitar en qué medida las acciones mentales se han realizado correctamente y, por tanto, hasta qué punto los errores cometidos en la extracción de características se deben a los algoritmos utilizados o a las propias señales.

Los ejemplos con los que se explican a continuación las técnicas analizadas han sido llevados a cabo con señales grabadas en el Departamento de Informática Médica de la Universidad de Graz y con señales recogidas en el Departamento de Electrónica de la Universidad de Alcalá. Los detalles de la grabación de las señales se describen en profundidad en el apartado 5.2. Como se detallará posteriormente en dicho apartado, en estos experimentos participaron sujetos de ambos géneros, con edades comprendidas entre 18 y 35 años imaginando, en cada unidad de grabación (que recibirá el nombre de **intento**),

el movimiento de su mano derecha o izquierda. En cada intento, el sujeto ve aparecer en pantalla una flecha que indica la mano cuyo movimiento ha de ser imaginado. Cada intento tiene una duración de 9 segundos en los que el sujeto se relaja hasta escuchar un sonido en  $t = 2s$  y ver la flecha correspondiente en  $t = 3s$ . En cada grabación, se registraron los electrodos  $C_3$ ,  $C_z$  y  $C_4$ , haciendo uso de un amplificador de la empresa *g.tec* con una frecuencia de muestreo de 128 Hz. Para el caso concreto de los experimentos reflejados a continuación, se han empleado únicamente las señales recogidas en los electrodos  $C_3$  y  $C_4$ , tratando de reducir al máximo el número de electrodos necesarios, extrayendo 2s de cada intento, los comprendidos entre  $t = 3,5s$  y  $t = 5,5s$ .

Se presentarán a continuación varias propuestas distintas para el preprocesado, extracción y selección de características. Partiendo de las técnicas más sencillas, se exploran sus fortalezas y debilidades para el tratamiento de señales EEG, y se proponen modificaciones, combinaciones y parametrizaciones concretas de los distintos algoritmos para optimizar su rendimiento en el análisis de este tipo de señales. Para cada uno de los métodos expuestos, se propondrá una arquitectura específica para implementar una BCI que será evaluada en el capítulo 5 de resultados experimentales:

- En primer lugar, según lo expuesto en 2.3.3.3, la imaginación de un movimiento provoca la aparición o desaparición de patrones frecuenciales conocidos, por lo que se propone la utilización de la transformada de Fourier como herramienta inicial de extracción de características.
- Debido a las limitaciones de esta transformada, se estudian otras técnicas que permiten extraer la información frecuencial y temporal de la señal. Más concretamente, se analiza en profundidad la transformada wavelet, sus características, familias y subfamilias, etc. y su posible aplicación combinada con la transformada de Fourier para potenciar las componentes frecuenciales más relevantes y reducir el número de coeficientes empleados.
- También se propone como método de extracción y selección de características el algoritmo de análisis de componentes principales (*Principal Component Analysis* o *PCA* en la literatura inglesa, y *ACP* en adelante). Esta técnica, utilizada habitualmente para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos con una mínima pérdida de información, revela adicionalmente, para determinado tipo de datos, la estructura de la información y sus características más relevantes. Si bien el método es muy sensible al tipo de complicaciones que supone el análisis de señales EEG, tales como ruido, artefactos, etc., se propondrá una modificación del mismo y una versión robustecida para mejorar su rendimiento en el tratamiento de estas señales.
- Finalmente se evaluará la extracción y selección de las características mediante regresión de mínimos cuadrados parciales (*Principal Least Squares* o *PLS* en la literatura inglesa, y *MCP* en adelante) y algunas evoluciones de este método que combinan

propiedades del análisis de componentes principales y del análisis de regresión múltiple. Este algoritmo pretende descubrir la estructura común que subyace no sólo en el conjunto de datos, como ACP, sino también entre el conjunto de datos y las clases a las que pertenecen dichos datos.

## 3.2. Transformada de Fourier y transformada wavelet

### 3.2.1. Transformada de Fourier

Como en tantas otras aplicaciones de procesamiento de señal, uno de los métodos más utilizados para el análisis de las señales electroencefalográficas es la transformada de Fourier (ecuaciones 3.1 y 3.2). La utilización de esta transformada se justifica a partir del hecho, resaltado anteriormente, de que existen ondas cerebrales encuadradas en bandas de frecuencia conocidas, que están asociadas a estados mentales concretos (véase apartado 2.3.3.3).

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-2j\pi ft} dt \quad (3.1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{2j\pi ft} df \quad (3.2)$$

Ya se ha citado anteriormente que una de las técnicas más comunes de análisis del EEG basadas en la transformada de Fourier es el estudio de la densidad espectral de potencia, en adelante d.e.p. (véase, por ejemplo, [Cul99]). El espectro de potencia puede calcularse mediante la ecuación 3.3.

$$P(f) = R_e^2[X(f)] + I_m^2[X(f)] \quad (3.3)$$

El análisis espectral de potencia no sólo facilita una sencilla forma gráfica de inspección del EEG, sino que, además, aporta información imposible de obtener mediante observación directa de la señal electroencefalográfica. A partir de esta información puede calcularse, también, como estudia el grupo de investigación de Graz, la potencia relativa de una banda de frecuencia. Esta se calcula como la relación entre la potencia concentrada en una banda de frecuencia frente a la potencia espectral total de la señal, se expresa en % e indica la aportación de cada banda a la señal total ([PdS99]).

Otra medida interesante y que se deriva del análisis del espectro de potencia de las señales EEG es la coherencia. Se aplica a dos señales,  $x(t)$  e  $y(t)$ , obtenidas en dos electrodos cerebrales y mide la sincronía entre ambas. El cálculo viene dado por las ecuaciones 3.4 y 3.5.

$$\text{Espectro cruzado} = X(f)Y^*(f) \quad (3.4)$$

$$Coherencia = \frac{\text{espectro cruzado}}{\sqrt{P_{X(f)} - P_{Y(f)}}} \quad (3.5)$$

Esta medida permite, por ejemplo, determinar el grado de interrelación entre distintas partes del cerebro en ciertos procesos mentales.

En el presente trabajo, la transformada de Fourier se ha aplicado directamente para obtener las componentes frecuenciales de las señales registradas. Las figuras 3.1 y 3.2 muestran la aplicación de esta transformada a las señales grabadas en los electrodos  $C_3$ , en azul en todas las gráficas, y  $C_4$ , en rojo, para seis experimentos distintos en los que el sujeto pensaba en mover su mano izquierda y otros seis en los que imaginaba mover su mano derecha.

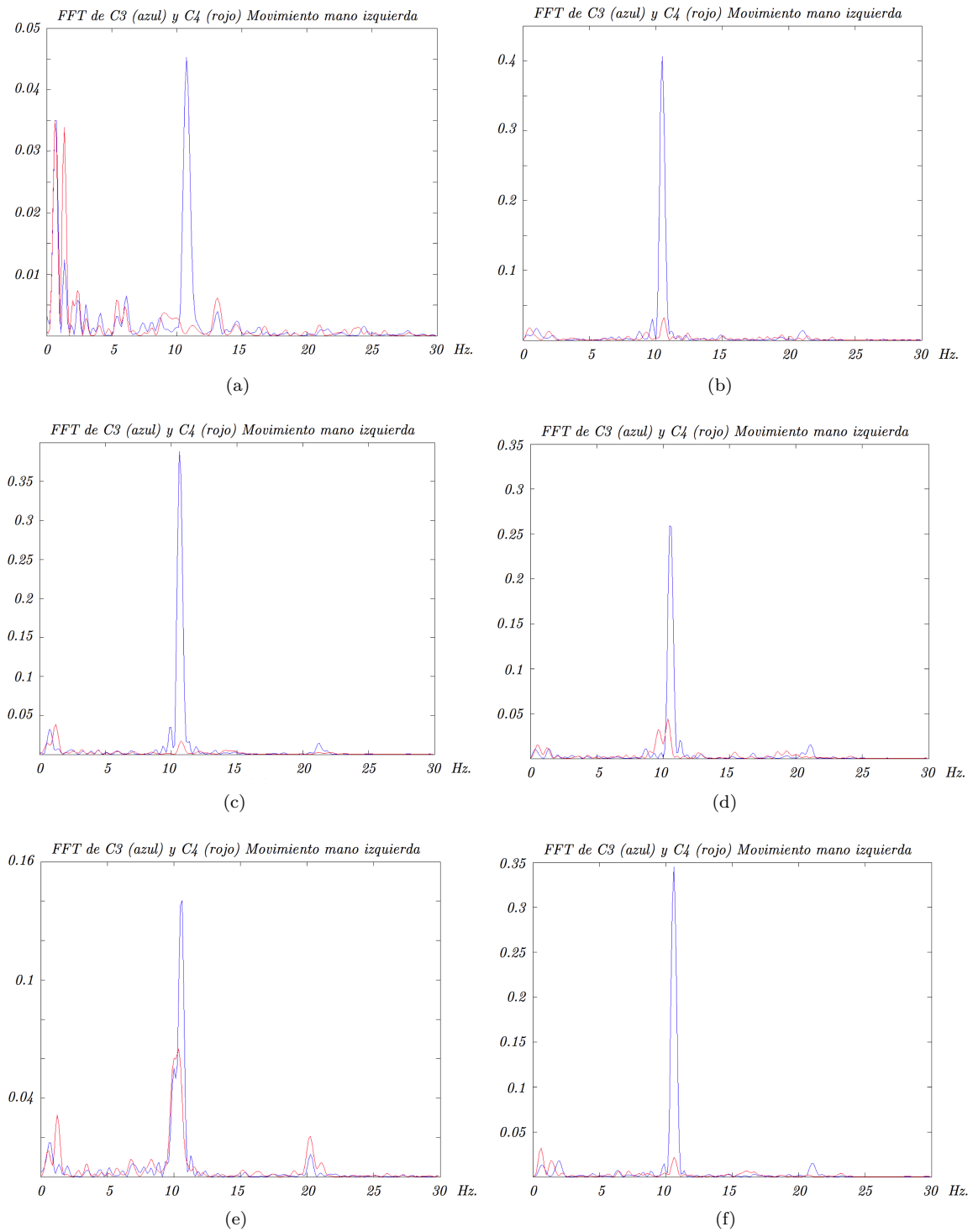
Como puede observarse en todos los ejemplos de la figura 3.1, al pensar en mover la mano izquierda, el canal  $C_3$  presenta una componente frecuencial predominante correspondiente a la sincronización de esa área del cerebro (ERD) en la banda de frecuencia del ritmo mu. Sin embargo, el canal  $C_4$ , contralateral al movimiento, no presenta dicha actividad por ser la zona del cerebro responsable del movimiento imaginado y haberse producido, como se explicó anteriormente (véase 2.3.3.3), la desincronización de su actividad (ERS).

En los ejemplos de la figura 3.2 puede observarse que el fenómeno es simétrico cuando el movimiento imaginado es el de la mano derecha. En este caso, es la señal del canal  $C_3$  la que refleja el fenómeno de desincronización, mientras que en el canal  $C_4$  aparece una componente predominante en el entorno de los 10 Hz.

A pesar de la claridad de los ejemplos empleados en las figuras anteriores, las componentes frecuenciales no son siempre tan fácilmente diferenciables. Una prueba de ello se muestra en la figura 3.3, donde el espectro de ambos canales es, al menos aparentemente, muy similar.

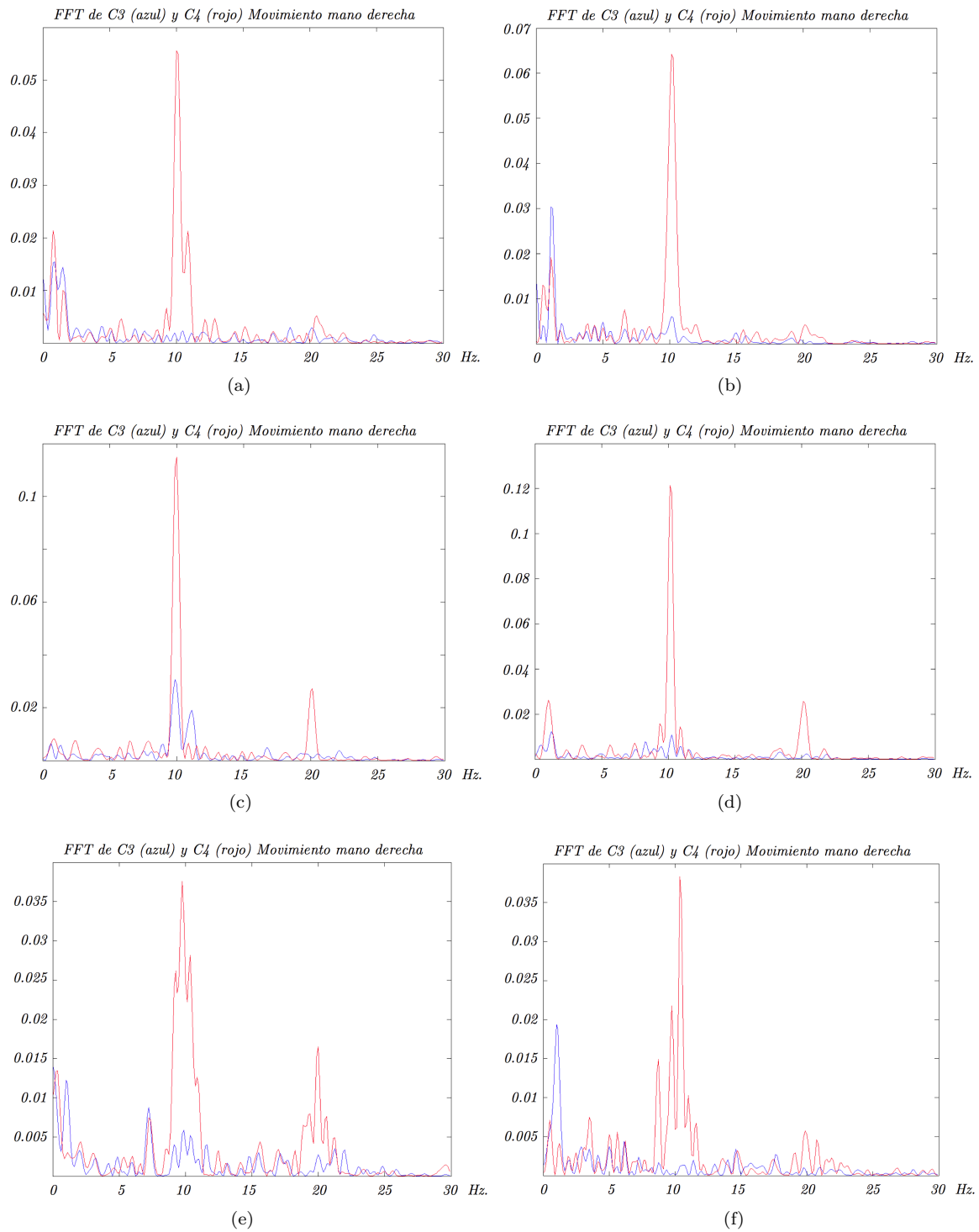
En estos casos, cabe plantear la duda de si la grabación de estas señales se corresponde a momentos en los que el sujeto no estuviera realizando correctamente la acción mental requerida. Se comprobará en adelante que, en algunos casos, esta afirmación puede ser cierta, pero también que estas señales pueden ser correctamente clasificadas con otro tipo de algoritmos.

La aplicación directa de la transformada de Fourier a una señal electroencefalográfica plantea, además, un último inconveniente importante que se debe tener en cuenta. Esta transformada no permite, por su propia formulación, localizar fenómenos en tiempo y frecuencia simultáneamente, es decir, no puede indicar qué frecuencias conforman una determinada señal en cada instante, cuestión que puede ser imprescindible en el análisis de una señal no estacionaria como es el EEG.

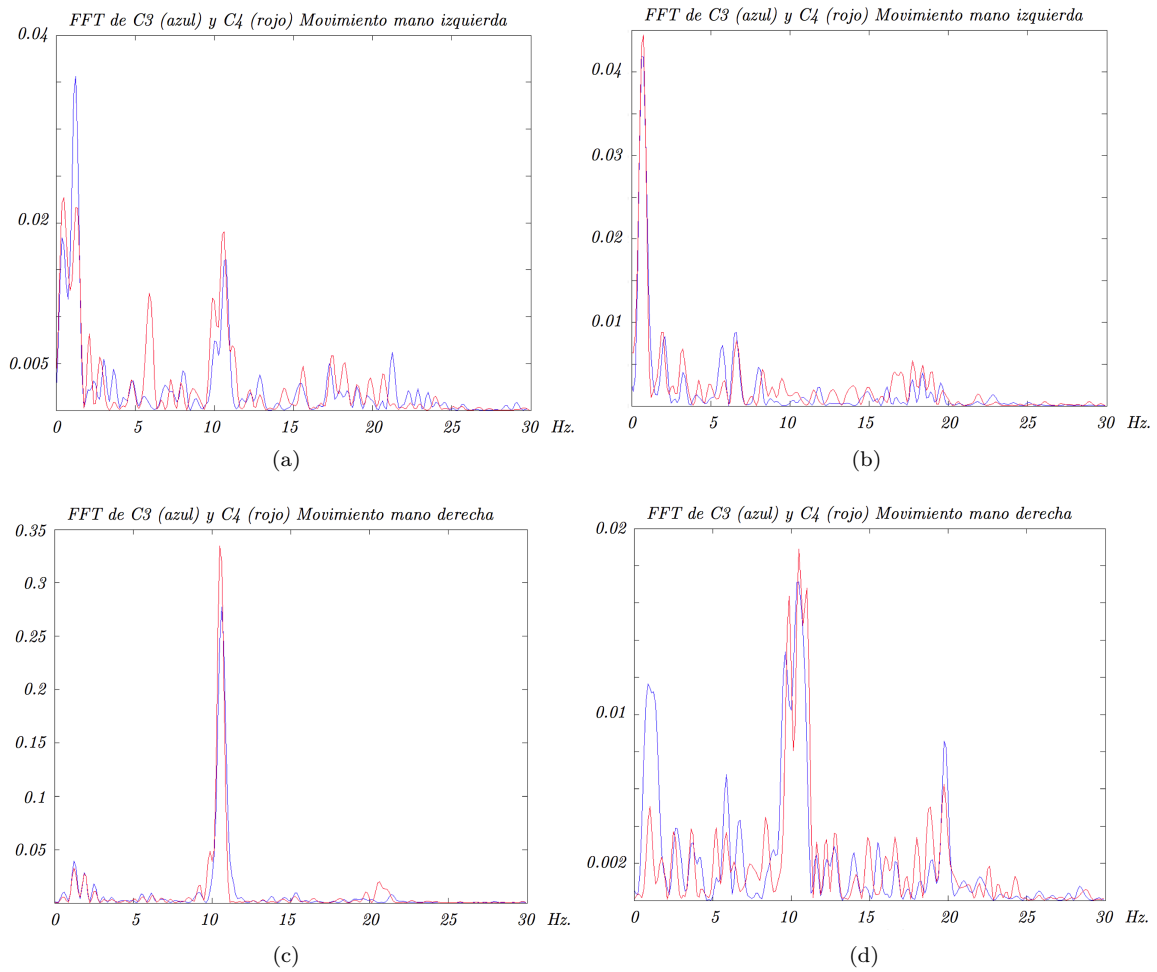


**Figura 3.1:** Transformada de Fourier de las señales grabadas en los electrodos  $C_3$  (azul) y  $C_4$  (rojo) durante seis experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda.





**Figura 3.2:** Transformada de Fourier de las señales grabadas en los electrodos  $C_3$  (azul) y  $C_4$  (rojo) durante seis experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano derecha.



**Figura 3.3:** Transformada de Fourier de las señales grabadas en los electrodos  $C_3$  (azul) y  $C_4$  (rojo) durante experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda (3.3(a) y 3.3(b)) y su mano derecha (3.3(c) y 3.3(d)).

### 3.2.2. Transformada wavelet

La conclusión inmediata de lo expuesto en el apartado anterior es que, en el procesamiento de las señales electroencefalográficas, conviene poder hacer un análisis un poco más exhaustivo, extrayendo mejores características al tiempo que se realiza un estudio simultáneo en tiempo y frecuencia. Es así como se llega a plantear el uso de la transformada wavelet.

#### 3.2.2.1. Conceptos previos

La teoría de wavelets<sup>1</sup> es un avance científico peculiar al tratarse del resultado de distintas líneas de investigación en algunos casos simultáneas y desconocidas entre sí.

El nombre wavelet comienza a utilizarse a partir del trabajo de Goupillaud, Grossmann y Morlet ([GGM84] y [GM84]) relacionado con el tratamiento de señales de naturaleza sísmica, siendo los primeros que formulan matemáticamente lo que hoy se conoce como transformada wavelet continua. Casi en paralelo, en el campo del análisis de señales discretas, Croisier, Galand y Esteban ([CEG76]) por un lado y Crocheire, Webber y Flanagan ([CWF76]) por otro, habían desarrollado un método denominado codificación subbanda enfocado a aplicaciones de transmisión digital de voz y compresión de imágenes, y Adelson y Burt diseñaban el algoritmo piramidal para la codificación de imágenes ([BA83]).

Son los trabajos de Mallat y Meyer ([Mal89b], [Mal89c], [Mey92]) en matemática pura los que comienzan a unificar el concepto de wavelet en una teoría matemática coherente y, con ello, marcan un punto de inflexión en su desarrollo y aplicación masiva en multitud de campos. Sus trabajos desarrollan el concepto de análisis multirresolución y comienzan a descubrir las relaciones entre todos los conceptos antes citados: codificación subbanda, algoritmo piramidal, el trabajo pionero de Alfréd Haar a principios del siglo XX, etc.

En este camino aparecen las bases de wavelets ortogonales (Meyer [Mey92]), las primeras con soporte compacto (Daubechies [Dau92]), la implementación mediante bancos de filtros (Vetterli [Vet87]) y todos los conceptos que se analizarán posteriormente al justificar su aplicación en el campo de señales electroencefalográficas.

La transformada wavelet consigue, precisamente, el objetivo citado al principio de este apartado: realizar un análisis simultáneo de las señales en tiempo y frecuencia.<sup>2</sup>

Hoy en día, las aplicaciones de esta teoría cubren estándares de compresión de imágenes (JPEG, DJVU), visión artificial, procesamiento de todo tipo de señales (sísmicas, biológicas, etc.), reconocimiento de voz, climatología, mecánica cuántica, e incluso técnicas de animación digital (Bichos y Toy Story 2 de Walt Disney Pictures y Pixar Animation

<sup>1</sup>Se mantendrá en el texto la palabra wavelet más estandarizada en la literatura que su traducción al castellano por ondículas.

<sup>2</sup>Para completar la descripción de esta transformada pueden consultarse también [Mal99], [VK95], [Dau92], [Alt96], [Pol95], [Gra95], [MMOP97] o [Fer98].

Studios).<sup>3</sup>

En los próximos apartados, se describirán los diferentes tipos de transformada wavelet, así como los parámetros y funciones que definen cada transformada o cada familia de wavelets.

### 3.2.2.2. Transformada wavelet continua (*Continuous Wavelet Transform, CWT*)

Una wavelet es una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  normalizada  $\|\psi\| = 1$ , que satisface la condición 3.6 (véase [Dau92]):

$$C_\psi = 2\pi \int |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)| d\xi < \infty \quad (3.6)$$

La transformada wavelet continua de una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se define de acuerdo a la ecuación 3.7.

$$Wf(\tau, s) = \langle f, \psi_{\tau,s} \rangle = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (3.7)$$

donde:

- $\psi^*(\cdot)$ : es la función wavelet, o wavelet madre, (o su complejo conjugado en caso de ser una función compleja).
- $\tau$ : es la traslación en el tiempo de dicha función.
- $s$ : es el factor de escala que da idea de la anchura que tendrá la función de wavelet y está relacionado con la inversa de la frecuencia.

Se puede reconstruir la función original según la ecuación 3.8.

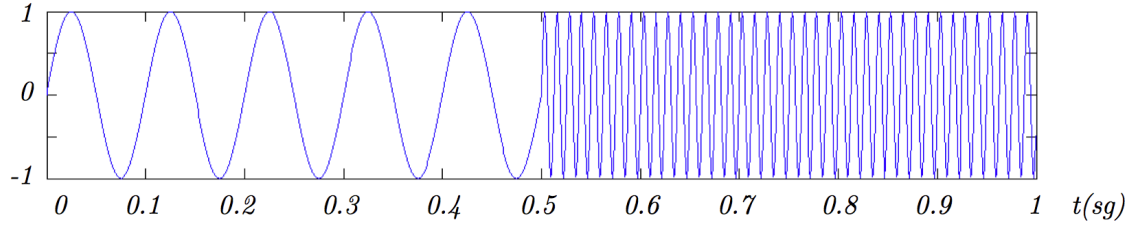
$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^2} \langle f, \psi_{\tau,s} \rangle \psi_{\tau,s} ds d\tau \quad (3.8)$$

Las wavelets  $\psi_{\tau,s}(t)$  generadas a partir de  $\psi(t)$  tienen diferente ubicación al ser desplazadas por  $\tau$  y distinta anchura al escalarse por  $s$ , pero mantienen la misma apariencia. Al calcular la transformada, se recorre la señal original, variando  $\tau$ , multiplicándola por la función wavelet escalada con distintos valores de  $s$ . Para cada pareja de valores  $(\tau, s)$ , si la señal contiene una componente frecuencial similar a la wavelet escalada, el resultado de la transformada será un valor relativamente alto. En caso contrario, el resultado será cero o casi nulo. De esta manera, se analiza la señal original encontrando sus componentes frecuenciales (inversa de  $s$ ) y localizándolas en el tiempo ( $\tau$ ).

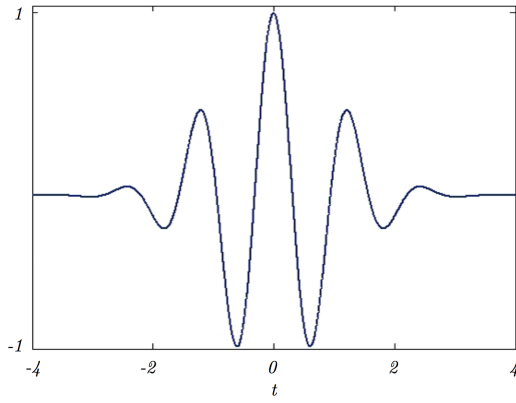
Para ilustrar mejor el funcionamiento de esta transformada, en la figura 3.4(a) se muestra una señal sinusoidal no estacionaria formada por dos señales también sinusoidales

<sup>3</sup>Para el estudio detallado de alguna de estas aplicaciones pueden consultarse entre otros [UA96], [Cip93], [Cod93], [SV99], [LV98] [SDS95b] y [LB98].

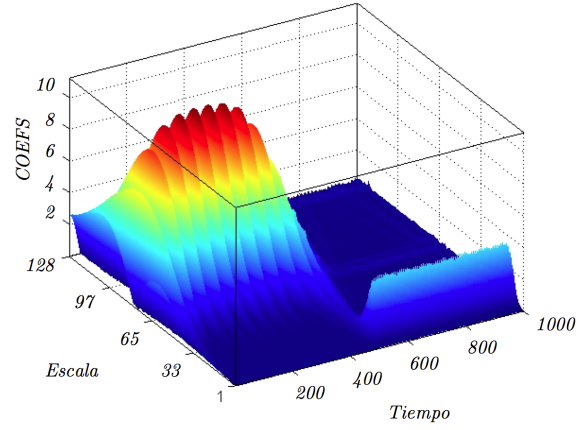
de 10 Hz. (entre  $t = 0s$  y  $t = 0,5s$ ) y 80 Hz. (entre  $t = 0,5s$  y  $t = 1s$ ). El resultado de la transformada se muestra en la figura 3.4(c), donde se puede comprobar la localización de la componente de baja frecuencia (que se corresponde con altas escalas  $s$ ) en los instantes iniciales de la señal, mientras que la componente de frecuencia más alta se destaca en la segunda mitad.



(a) Señal sinusoidal ejemplo.



(b) Wavelet *Morlet*.



(c) Transformada continua de la señal.

**Figura 3.4:** Transformada wavelet continua de una señal sinusoidal de ejemplo.

Existen distintos tipos de funciones wavelet madre ( $\psi$ ), como la utilizada en el ejemplo anterior (figura 3.4(b)), denominada *Morlet* (ecuación 3.9), o la denominada *Mexican Hat* (ecuación 3.10).

$$\psi(t) = c_\sigma \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}t^2} (e^{j\sigma t} - e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}) \quad (3.9)$$

$$\psi(t) = \frac{3}{\sqrt{9\pi}\sigma^3} (e^{\frac{-t^2}{3\sigma^2}} \cdot (\frac{t^2}{\sigma^2} - 1)) \quad (3.10)$$

### 3.2.2.3. Transformada wavelet discreta (*Discrete Wavelet Transform, DWT*) mediante discretización de los parámetros $\tau$ y $s$

El cálculo de los coeficientes wavelet con todos los posibles desplazamientos y escalas es, en realidad, una tarea inabordable en términos de tiempo y recursos necesarios. La

aplicación práctica de esta transformada puede realizarse discretizando los factores de escala y los desplazamientos de la transformada wavelet original según la ecuación 3.11.

$$\left. \begin{aligned} s &= s_0^j \\ \tau &= \tau_0 s_0^j k \end{aligned} \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}} \quad (3.11)$$

De esta manera, las wavelets quedarán expresadas para un determinado nivel de escala y un desplazamiento concreto según 3.12.

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}} \psi\left(\frac{t - \tau_0 s_0^j k}{s_0^j}\right) \quad (3.12)$$

Para ahondar un poco más en el significado físico de esta transformada se puede hacer uso de una sencilla analogía con el proceso de enfoque del ojo humano. El factor de escala  $s_0^j$  semejaría la amplitud del área de un objeto que se abarcaría con la mirada, mientras que el factor de traslación  $\tau_0 s_0^j k$ , proporcional al factor de escala, estaría relacionado con los movimientos que hace el ojo para recorrer dicho objeto o, en otras palabras, el punto del objeto al que se está mirando en un determinado instante. Para advertir los detalles de alguna localización concreta del objeto, el ojo abarcará una zona pequeña y realizará movimientos finos entorno a esos detalles. Esto es lo que hace la transformada cuando  $j$  es grande y negativa dando lugar a una wavelet concentrada y a traslaciones pequeñas. En cambio, cuando se desea tener una visión general del objeto, el ojo abarca una zona grande y necesita realizar menos traslaciones, pero más amplias. En el caso de la transformada, esta situación equivale a valores positivos grandes de  $j$ .

Bajo determinadas condiciones, véase [Dau92], el conjunto de wavelets generado mediante la discretización explicada brevemente en este apartado y la elección correcta de la función wavelet madre permiten caracterizar completamente cualquier función  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . En otras palabras, constituyen un marco (concepto introducido por Duffin y Schaeffer en [DS52]) que permite la obtención de los coeficientes y la posterior reconstrucción de la función o señal original. Sin embargo, al igual que en el caso continuo, esta transformada así discretizada, dependiendo de la elección de parámetros que se realice, provee una descripción de la señal original con información redundante. La existencia de bases de wavelets ortonormales dentro de  $L^2(\mathbb{R})$  resuelve este problema, manteniendo, además, una buena resolución espectro temporal de las señales, como se describe en el apartado siguiente.

#### 3.2.2.4. Transformada wavelet discreta (*Discrete Wavelet Transform, DWT*). Análisis multirresolución

Se ha demostrado, véanse [Mal99] o [VK95] por ejemplo, que eligiendo un subconjunto concreto de escalas y desplazamientos basados en potencias de 2 con  $s_0 = 2$  y  $\tau_0 = 1$  y una función  $\psi(t)$  adecuada, es posible obtener wavelets  $\psi_{j,k}(t)$  (ecuación 3.13) que constituyan

una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ , permitiendo realizar un análisis suficientemente preciso, eficiente y sin redundancia.

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right) \quad (3.13)$$

Cualquier señal de energía finita puede descomponerse según la ecuación 3.14 en función de este tipo de bases ortonormales wavelet.

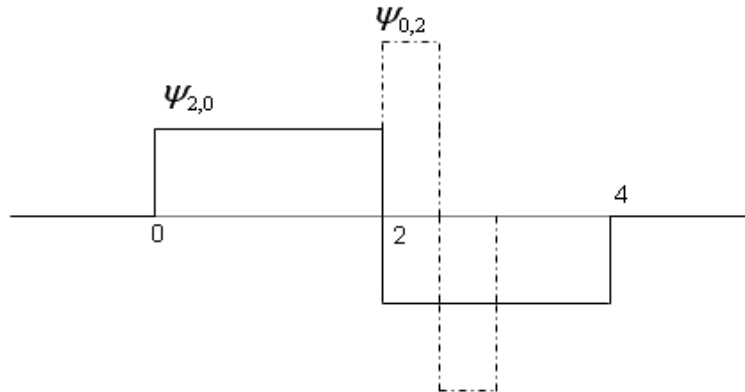
$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (3.14)$$

Siendo los coeficientes wavelet discretos (homólogos a los obtenidos en el caso continuo de la ecuación 3.7):

$$Wf(j, k) = d^j[k] = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (3.15)$$

El ejemplo más sencillo de función  $\psi$  para el que  $\psi_{j,k}$  constituye una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  es la función o wavelet de Haar (ecuación 3.16). En la figura 3.5 se representan  $\psi_{2,0}$  y  $\psi_{0,2}$  obtenidas mediante la ecuación 3.13.

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.16)$$



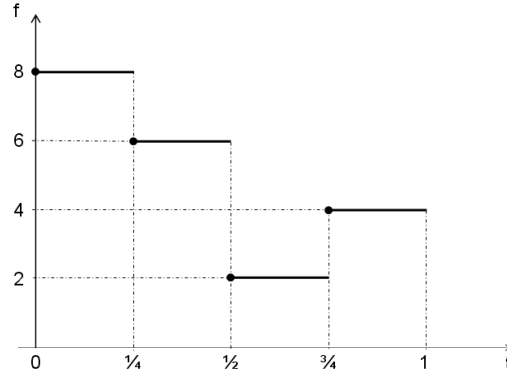
**Figura 3.5:** Representación de las wavelets Haar  $\psi_{2,0}$  y  $\psi_{0,2}$ .

La analogía descrita anteriormente entre el ojo humano y la discretización de los parámetros  $s$  y  $\tau$ , y el ejemplo de la wavelet de Haar introducen, como se verá a continuación, el concepto de multirresolución. Para ahondar un poco más en este concepto y entender mejor la transformada wavelet, se plantea a continuación un ejemplo concreto<sup>4</sup> de cómo

<sup>4</sup>Ejemplo basado en el utilizado en [SDS95a].

se aproxima una función  $f$  mediante el análisis multirresolución y las wavelets, en este caso, de Haar.

Supóngase la función  $f(t)$  de la figura 3.6. Como se puede comprobar su dominio es  $[0, 1)$  y la función es constante a intervalos con intervalos de longitud  $2^j$  con  $j = -2$ .



**Figura 3.6:** Función  $f(t)$  ejemplo.

Se denotarán por  $V^j$  las funciones constantes sobre los intervalos equidistantes de anchura  $2^j$  con dominio comprendido en  $[0, 1)$ . Se dirá, por tanto, que la función del ejemplo  $f \in V^{-2}$ . Dada esta definición, es fácil comprobar que:

$$V^2 \subset V^1 \subset V^0 \subset V^{-1} \subset V^{-2} \dots \quad (3.17)$$

Efectivamente, cualquier función que pertenezca a  $V^0$  y sea por tanto constante en  $[0, 1)$  (intervalo de longitud  $2^0 = 1$ ) es asimismo constante en los intervalos  $[0, \frac{1}{2})$  y  $[\frac{1}{2}, 1)$  y, por tanto, pertenece a  $V^{-1}$ .

Para buscar una base de estos espacios que se acaban de presentar, se utiliza la función de escalado, denotada por  $\phi$  y definida según la ecuación 3.18.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3.18)$$

Las funciones de escalado que se generan a partir de ésta, según la ecuación 3.19, se puede comprobar que son base del espacio  $V^j$ .

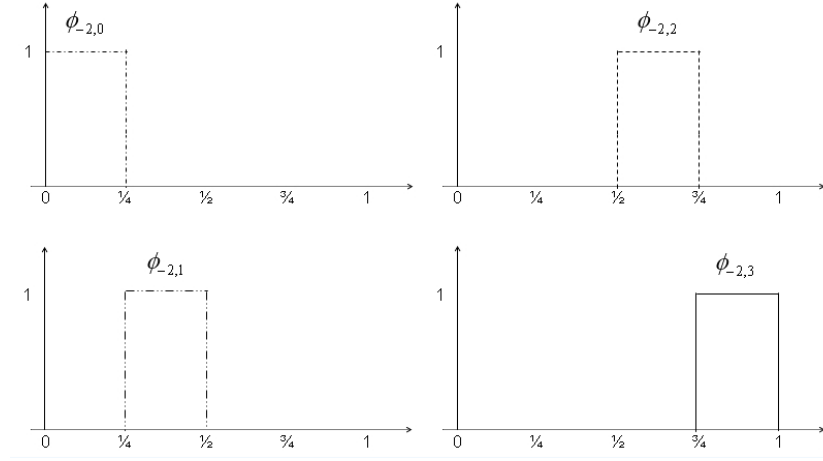
$$\phi_{j,k}(t) = \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right) \quad j = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \quad (3.19)$$

En el ejemplo previo de la función  $f \in V^{-2}$  la base vendría dada por las funciones de la figura 3.7.

La función  $f$  podría expresarse como:

$$f(t) = c^{-2}[0] \cdot \phi_{-2,0}(t) + c^{-2}[1] \cdot \phi_{-2,1}(t) + c^{-2}[2] \cdot \phi_{-2,2}(t) + c^{-2}[3] \cdot \phi_{-2,3}(t) \quad (3.20)$$





**Figura 3.7:** Base del espacio  $V^{-2}$ .

donde:

$$\begin{aligned} c^{-2}[0] &= 8 \\ c^{-2}[1] &= 6 \\ c^{-2}[2] &= 2 \\ c^{-2}[3] &= 4 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Haciendo uso del producto escalar estándar (ecuación 3.22) se puede definir un nuevo espacio  $W^j$  como el espacio de todas las funciones pertenecientes a  $V^{j+1}$  y ortogonales a las funciones de  $V^j$  cuya base será denominada  $\psi_{j,k}(x)$  (ecuación 3.23).

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx \tag{3.22}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\psi_{j,k}(t) = \psi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right)$$

Como se puede comprobar, esta base está formada por las wavelets de Haar descritas en la ecuación 3.16 eliminado el factor de normalización  $\frac{1}{\sqrt{2^j}}$  para simplificar el ejemplo.

Juntas, las funciones  $\phi_{j,k}(t)$  y  $\psi_{j,k}(t)$ , forman una base de  $V^{j+1}$ , por lo que cualquier función  $g \in V^{j+1}$  puede expresarse como combinación lineal de  $\phi_{j,k}(t)$  y  $\psi_{j,k}(t)$ .

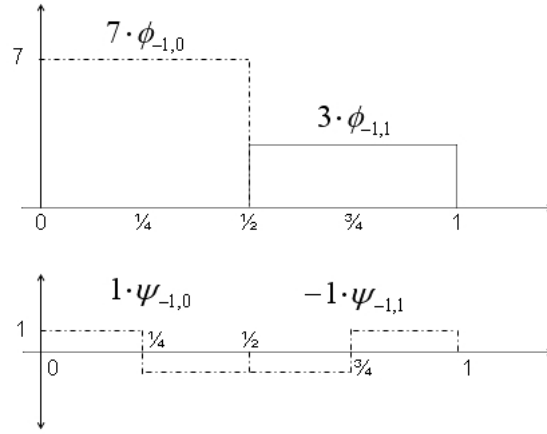
Volviendo al ejemplo, puede entonces descomponerse  $f \in V^{-2}$  como combinación lineal de  $\phi_{-1,k}(t)$  y  $\psi_{-1,k}(t)$ :

$$f(t) = c^{-1}[0] \cdot \phi_{-1,0}(t) + c^{-1}[1] \cdot \phi_{-1,1}(t) + d^{-1}[0] \cdot \psi_{-1,0}(t) + d^{-1}[1] \cdot \psi_{-1,1}(t) \quad (3.24)$$

donde:

$$\begin{aligned} c^{-1}[0] &= 7 \\ c^{-1}[1] &= 3 \\ d^{-1}[0] &= 1 \\ d^{-1}[1] &= -1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

En la figura 3.8 se muestra esta descomposición gráficamente.



**Figura 3.8:** Función  $f(t)$  en función de  $\phi_{-1,k}(t)$  y  $\psi_{-1,k}(t)$ .

Como puede comprobarse, los coeficientes que acompañan a las funciones de escalado,  $c^{-1}[0]$  y  $c^{-1}[1]$ , son la media de las parejas de coeficientes adyacentes de la ecuación 3.24, mientras que los coeficientes que acompañan a las funciones wavelets,  $d^{-1}[0]$  y  $d^{-1}[1]$ , son la diferencia entre dichas medias y los valores originales. Los primeros coeficientes guardan una **aproximación** de la señal original, mientras que los últimos almacenan los **detalles**, lo que dará nombre a estos coeficientes en adelante.

$$\begin{aligned} c^{-1}[0] &= \frac{c^{-2}[0] + c^{-2}[1]}{2} & c^{-1}[1] &= \frac{c^{-2}[2] + c^{-2}[3]}{2} \\ d^{-1}[0] &= c^{-2}[0] - c^{-1}[0] & d^{-1}[1] &= c^{-2}[2] - c^{-1}[1] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Completando el análisis, se puede decir que la función se descompone al proyectarse ortogonalmente sobre los espacios  $V^{-1}$  y  $W^{-1}$ .

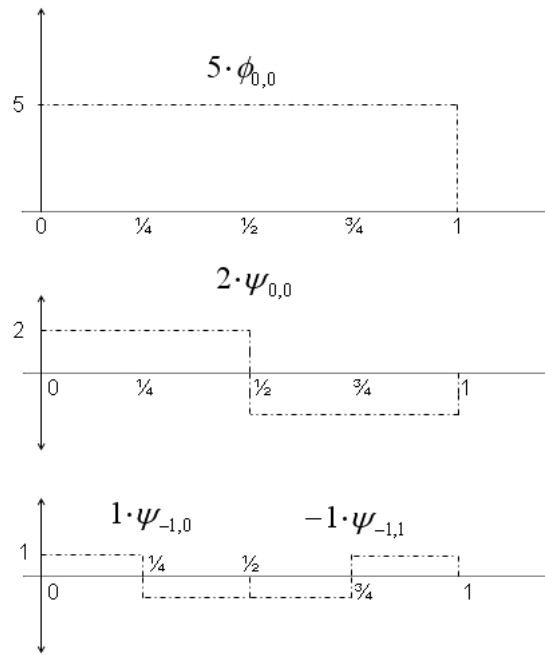
Se puede seguir descomponiendo la parte de  $f$  expresada en la base de  $V^1$  proyectándola en  $V^0$  y  $W^0$ :

$$f(t) = c^0[0] \cdot \phi_{0,0}(t) + d^0[0] \cdot \phi_{0,0}(t) + d^{-1}[0] \cdot \psi_{-1,0}(t) + d^{-1}[1] \cdot \psi_{-1,1}(t) \quad (3.27)$$

donde:

$$\begin{aligned} c^0[0] &= 5 \\ d^0[0] &= 2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

En la figura 3.9 se muestra gráficamente la descomposición resultante hasta este punto.



**Figura 3.9:** Función  $f(t)$  en función de  $\phi_{0,k}(t)$ ,  $\psi_{0,k}(t)$  y  $\psi_{-1,k}(t)$ .

De nuevo,  $c^0[0]$  es la media de los coeficientes  $c^{-1}[0]$  y  $c^{-1}[1]$ , mientras que  $d^0[0]$  es la diferencia entre los coeficientes y la media.

En resumen, el ejemplo ilustra la descomposición de la función  $f(t)$ , con distintos niveles de resolución  $j$ . Los coeficientes de aproximación promedian la función mientras que los de detalle guardan las diferencias que permiten no perder información. En términos de la comparación con la observación de un objeto, cada paso en el árbol de descomposición, supone levantar la vista del objeto abarcando una zona más amplia y haciendo los desplazamientos más grandes.

En la descripción que se lleva a cabo a continuación, mediante la formalización matemática del concepto de análisis multirresolución desarrollada por Mallat y Meyer ([Mal89b], [Mey92]), se generalizarán los aspectos presentados en este ejemplo a la descomposición de cualquier señal de  $L^2(\mathbb{R})$  en función de una base ortonormal obtenida a partir de las funciones wavelets.

El análisis multirresolución parte de una secuencia de sucesivos espacios de aproximación denominados  $V^j$  que satisfacen:

$$V^2 \subset V^1 \subset V^0 \subset V^{-1} \subset V^{-2} \dots \quad (3.29)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V^j = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.30)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V^j = \{0\} \quad (3.31)$$

$$f(x) \in V^m \Leftrightarrow f(2^m x) \in V^0 \quad (3.32)$$

$$f(x) \in V^0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V^0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.33)$$

$$\exists \{\phi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\} \text{ base ortonormal de } V^0 \quad (3.34)$$

Algunos aspectos a destacar de estos requisitos, comentados en algún caso al ilustrar el ejemplo anterior, son:

- Si se denota por  $P_j f$  la proyección ortogonal de la función  $f$  en  $V^j$ , la ecuación 3.30 implica que  $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$ .
- La función  $\phi$  de la ecuación 3.34 se denomina genéricamente, como en el ejemplo, función de escalado.
- Las ecuaciones 3.32 - 3.34 implican que las funciones  $\{\frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi(\frac{x-2^j k}{2^j})\}$  son base ortonormal del espacio  $V^j$ .

El aspecto más importante al que se llega tras plantear el concepto de análisis multirresolución es que, dado cualquier conjunto de espacios que satisfagan los requisitos anteriores, se demuestra que existe una base ortonormal de wavelets (véase [Dau92], [Mey92] o [Mal89a] para la demostración):

$$\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\} \text{ de } L^2(\mathbb{R}) \quad (3.35)$$

tales que:

$$P_{j+1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (3.36)$$

Es decir, para un nivel de resolución dado  $j$ , esta base genera un espacio  $W^j$  complemento ortogonal de  $V^j$  en  $V^{j+1}$ .

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j \quad (3.37)$$

Lo que en virtud de 3.30 y 3.31 nos lleva a afirmar que:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W^j \quad (3.38)$$

Es decir, el conjunto completo  $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  como se afirmaba en la ecuación 3.14 procedente de la discretización de los parámetros  $s$  y  $\tau$  en la ecuación original 3.7.

El método para obtener  $\psi(x)$  a partir de  $\phi(x)$  se describe con diferentes ejemplos en [Dau92], [Mey92] o [Mal89a], así como las características que heredarán las wavelets dependiendo del tipo de función de escalado a partir de la cual se generen y de las que se hablará posteriormente, al diseñar la arquitectura de análisis de las señales electroencefalográficas.

Finalmente, una ventaja interesante del análisis mediante wavelets descubierta por Mallat, descrita en [Mal89c] y fundamentada sobre el análisis multirresolución, es su posible implementación mediante bancos de filtros discretos que se describirá brevemente a continuación.

Supóngase una función  $f(t) \in V^0$  tal y como se muestra en la ecuación 3.39<sup>5</sup>.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_n c^0[n] \phi(t - n) \\ c^0[n] &= \langle f(t), \phi_{0,n} \rangle \end{aligned} \quad (3.39)$$

Supuestos los axiomas del análisis multirresolución explicados anteriormente,  $f(t)$  puede descomponerse en aproximación y detalle sobre los espacios  $V^1$  y  $W^1$  respectivamente. Atendiendo en primer lugar a la proyección sobre  $V^1$ , si se denomina  $a^1[n]$  a los coeficientes de esta proyección:

$$a^1[n] = \langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(\frac{t}{2} - n) \rangle \quad (3.40)$$

Siendo la proyección:

$$P_1 f(t) = \sum_n a^1[n] \phi_{1,n} \quad (3.41)$$

---

<sup>5</sup>Para mayor claridad en el desarrollo se utilizará en algunas ocasiones la notación extendida de las funciones de escalado y wavelet, es decir,  $\phi(t - n)$  en lugar de  $\phi_{0,n}$  o  $\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(\frac{t}{2} - n)$  en lugar de  $\phi_{1,n}$  por ejemplo.

Por otro lado, la función  $\phi(t)$ , base de  $V^0$ , pertenece también, como consecuencia de 3.29, a  $V^{-1}$  y puede expresarse en función de la base de este espacio de la siguiente forma:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h[k] \phi(2t - k) \quad (3.42)$$

de donde:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2} - n\right) = \sum_k h[k] \phi(t - 2n - k) \quad (3.43)$$

Sustituyendo en 3.40

$$a^1[n] = \sum_k h[k] \langle f(t), \phi(t - 2n - k) \rangle \quad (3.44)$$

Reemplazando  $f(t)$  por su valor en 3.39:

$$a^1[n] = \sum_k \sum_l h[k] c^0[l] \langle \phi(t - l), \phi(t - 2n - k) \rangle \quad (3.45)$$

Por la ortogonalidad de  $\phi(t)$  respecto a sus traslaciones, se cumple que:

$$\langle \phi(t - l), \phi(t - 2n - k) \rangle = \delta[l - 2n - k] \quad (3.46)$$

Lo que implica que sólo los términos con  $l = 2n + k$  son relevantes en la segunda suma de 3.45 y, por tanto:

$$a^1[n] = \sum_l h[l - 2n] c^0[l] \quad (3.47)$$

Definiendo  $\tilde{h}[n] = h[-n]$ , se obtiene que:

$$a^1[n] = \sum_l \tilde{h}[2n - l] c^0[l] \quad (3.48)$$

Es decir, los coeficientes de aproximación de  $f(t)$  en  $V^1$  se obtienen mediante filtrado de los coeficientes  $c^0$  originales con  $\tilde{h}$  y submuestreo.

De forma similar se pueden obtener los coeficientes de detalle, que surgen de la proyección de  $f(t)$  en  $W_1$ , que se denotarán por  $d^1[n]$ :

$$d^1[n] = \langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2} - n\right) \rangle \quad (3.49)$$

Expresando  $\psi(t)$  en función de la base de  $V^{-1}$  como se hizo con  $\phi(t)$  en 3.42 y 3.43:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g[k] \phi(2t - k) \quad (3.50)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2} - n\right) = \sum_k g[k] \phi(t - 2n - k) \quad (3.51)$$

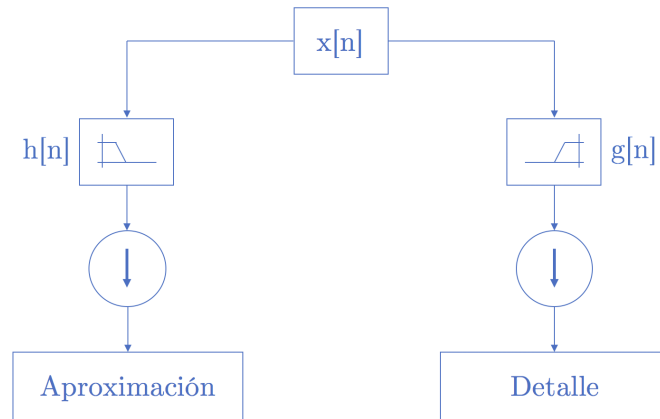
De forma análoga al desarrollo anterior:

$$d^1[n] = \sum_k \sum_l g[k] c^0[l] \langle \phi(t - l), \phi(t - 2n - k) \rangle \quad (3.52)$$

$$d^1[n] = \sum_k g[l - 2n] c^0[l] \quad (3.53)$$

$$d^1[n] = \sum_l \tilde{g}[2n - l] c^0[l] \quad (3.54)$$

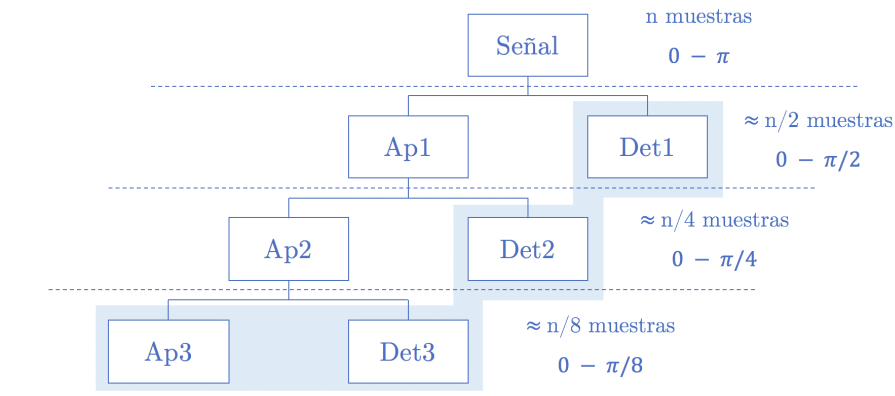
El primer paso de esta descomposición se muestra gráficamente en la figura 3.10.



**Figura 3.10:** Transformada wavelet discreta. Primer nivel.

El algoritmo, por tanto, consiste en hacer pasar la señal original  $f$  por dos filtros complementarios: uno paso-alto o wavelet ( $g[n]$ ) y otro paso-bajo o de escalado ( $h[n]$ ), tal y como muestra la figura 3.10, obteniéndose los coeficientes de dos señales que, como ya se ha citado, se denominarán aproximación,  $A$ , y detalle,  $D$ . Esta descomposición, siguiendo el esquema del análisis multirresolución, puede realizarse sucesivamente sobre las señales de aproximación obtenidas según se muestra en la figura 3.11. En esta figura, se parte de una señal  $x[n]$  con 512 muestras y un ancho de banda entre 0 y  $\pi$  radianes. Dado que los filtros dividen la señal por la mitad de su ancho de banda, a la salida del filtro paso bajo se obtiene una señal de 512 muestras y un ancho de banda entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$ . El siguiente paso en el proceso, según 3.48, es un submuestreo que da como resultado una señal de 256 muestras y el ancho de banda anteriormente citado. Esta señal recibe el nombre de

aproximación de primer orden, mientras que la señal resultante del filtrado paso alto y el consiguiente submuestreo según 3.54 se denomina detalle de primer orden.



**Figura 3.11:** Esquema de la transformada wavelet discreta multinivel.

En la figura 3.12(b) se observa un ejemplo de la aplicación de esta transformada con varios niveles sobre una señal no estacionaria, 3.12(a). La señal está formada por la sucesión de 4 sinusoides de 10, 80, 150 y 400 Hz generadas con una frecuencia de muestreo de 1 kHz. Puede verse cómo la descomposición wavelet va seleccionando las distintas componentes frecuenciales, localizándolas en el tiempo. En el detalle de nivel 1, se filtran las frecuencias situadas entre 250 Hz y 500 Hz, extrayendo por tanto la sinusoidal de mayor frecuencia. Como se comprueba en la figura 3.12, en el detalle de nivel 2 se filtran las componentes situadas entre 125 y 250 Hz, en el de nivel 3 las situadas entre 62,5 y 125 Hz y queda reflejada la menor componente frecuencial en la aproximación de nivel 3.

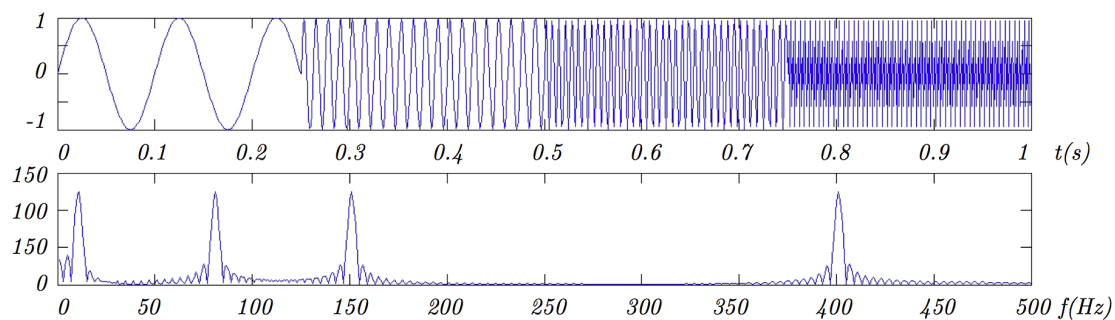
Las componentes frecuenciales de las distintas señales obtenidas en el proceso se muestra en la figura 3.13.

Haciendo una analogía con la *CWT*, el proceso de submuestreo es el equivalente a ir haciendo la ventana más ancha, es decir ir aumentando la escala y perdiendo resolución temporal, al tiempo que el filtrado implica ir aumentando la resolución frecuencial.

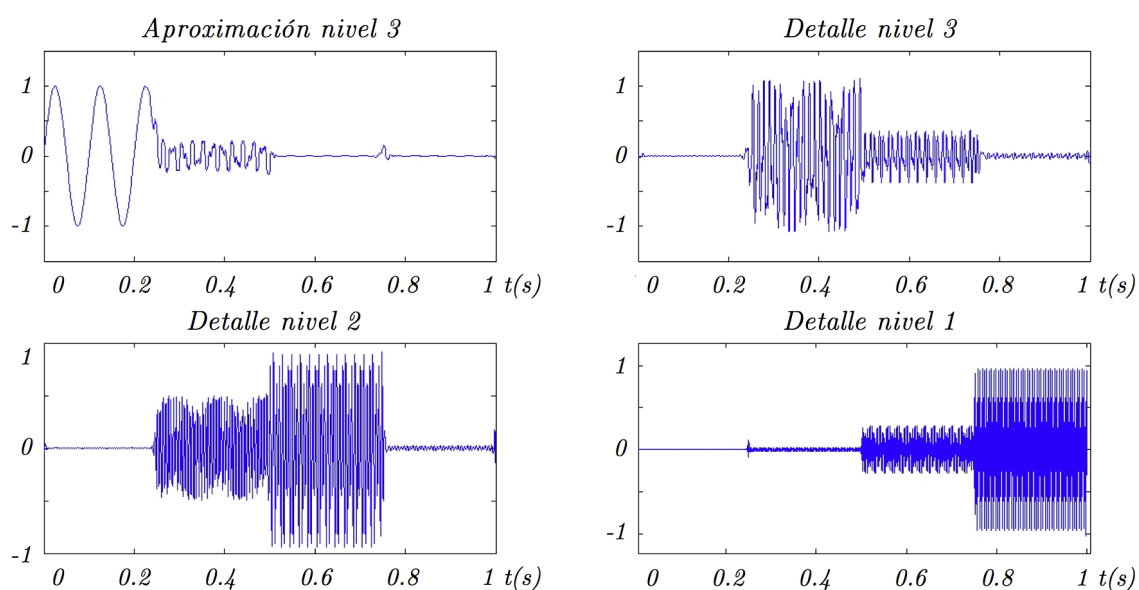
Concretando el uso de la transformada wavelet en el caso de las señales EEG, en las figuras 3.14 y 3.15 se muestran los resultados de aplicar esta transformada (aproximación de nivel 2 y detalles de nivel 1 y 2) sobre las mismas señales analizadas mediante la transformada de Fourier en las figuras 3.1(a), 3.1(b), 3.2(a) y 3.2(b) en las que sujeto imaginaba mover su mano izquierda y su mano derecha respectivamente.

Es difícil apreciar, a primera vista, diferencias características entre las transformadas de las señales grabadas en  $C_3$  (azul) y  $C_4$  (rojo). Se advierte, quizá, una mayor amplitud y regularidad en la señal correspondiente al hemisferio del cerebro no encargado del movimiento. Este efecto se distingue con cierta claridad en la figura 3.14(b), que se corresponde con la imaginación del movimiento de la mano izquierda. Se advierte en este caso que la aproximación y el detalle de segundo orden de la señal grabada en  $C_3$  (en azul) sobre el



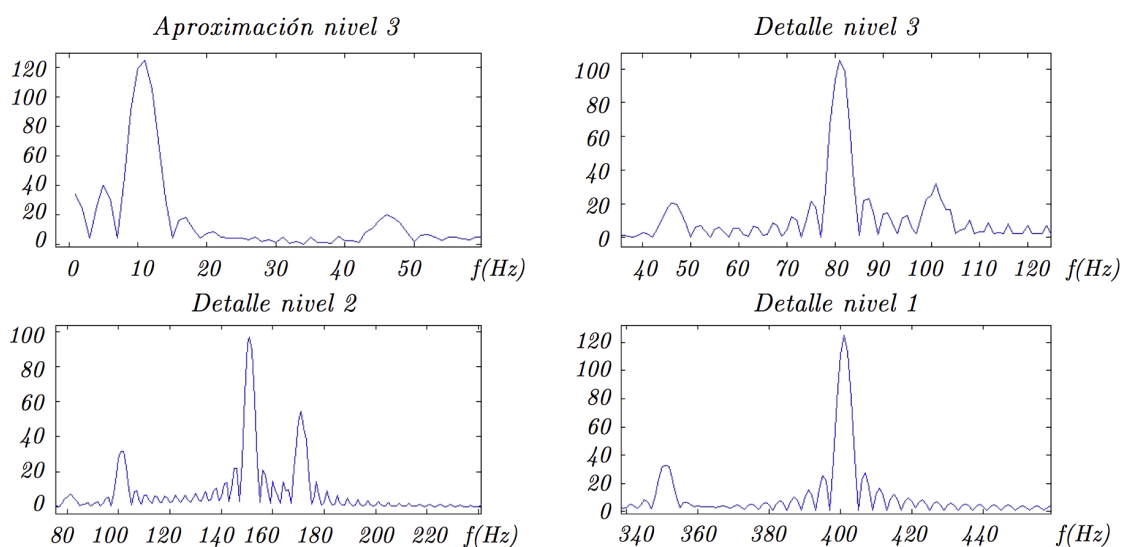


(a) Señal ejemplo.



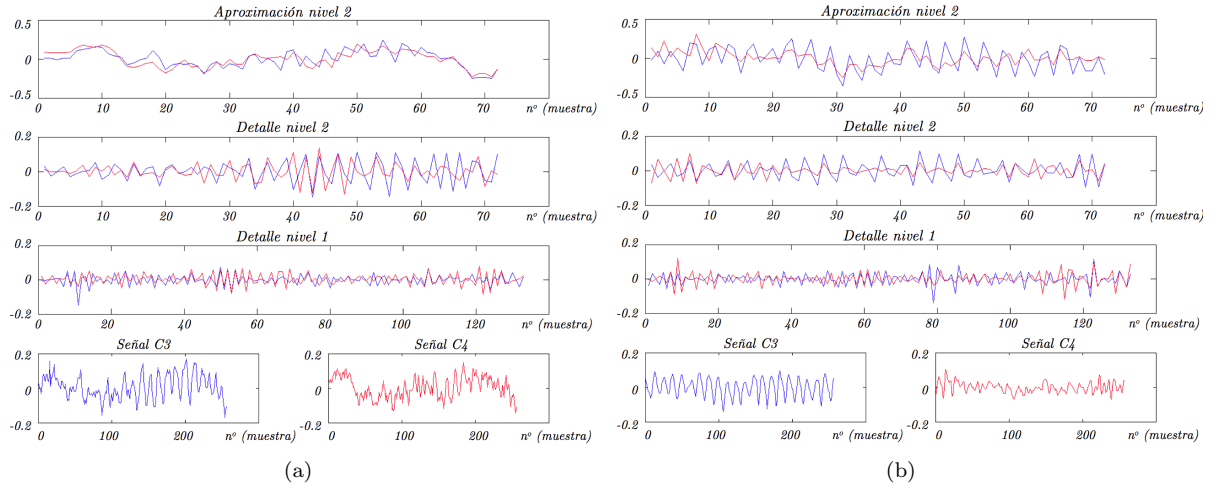
(b) Transformada discreta de la señal.

**Figura 3.12:** Transformada wavelet discreta de una señal ejemplo.

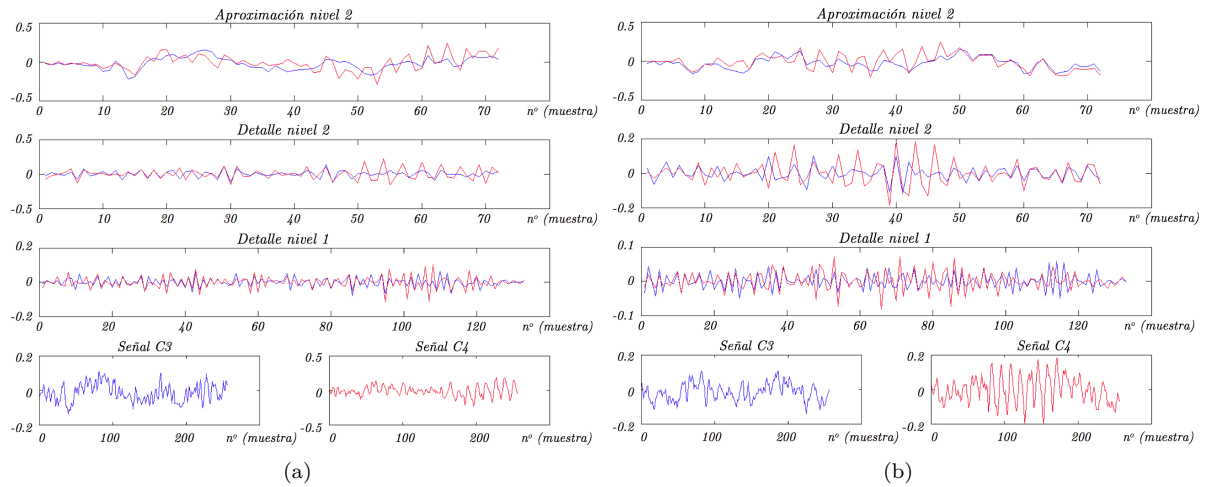


**Figura 3.13:** Detalle de la transformada de Fourier de las componentes obtenidas mediante la transformada wavelet discreta en el ejemplo de la figura 3.12.

hemisferio izquierdo presenta un patrón más regular y de mayor amplitud (producto de la sincronización de la actividad neuronal en esta zona) que la transformada de la señal  $C_4$  (en rojo), cuya actividad está desincronizada fruto de la imaginación motora. Ocurre lo contrario cuando se trata de la imaginación del movimiento de la mano derecha como puede comprobarse en 3.15(a) y 3.15(b).



**Figura 3.14:** Transformada wavelet discreta de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos  $C_3$  (azul) y  $C_4$  (rojo) durante los experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda. Mismas señales analizadas mediante la transformada de Fourier en las figuras 3.1(a), 3.1(b).



**Figura 3.15:** Transformada wavelet discreta de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos  $C_3$  (azul) y  $C_4$  (rojo) durante los experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano derecha. Mismas señales analizadas mediante la transformada de Fourier en las figuras 3.2(a) y 3.2(b).

### 3.2.3. Arquitectura propuesta para el uso de la transformada wavelet discreta aplicada a la extracción de características de señales electroencefalográficas. Combinación con la transformada de Fourier.

En las figuras 3.14 y 3.15 se ha mostrado la descomposición de varias señales electroencefalográficas mediante la transformada wavelet discreta. Dicha descomposición no parece extraer, a primera vista, características suficientemente discriminatorias para implementar una clasificación robusta y eficiente. Esta primera intuición se verá reforzada por los resultados obtenidos en los experimentos realizados.

Sin embargo, llegados a este punto, se está en disposición de plantear una arquitectura óptima de extracción de características combinada que se apoye en la transformada wavelet discreta, pero que a la vez se sirva también de la transformada de Fourier, con los siguientes objetivos:

- utilizar la transformada wavelet para filtrar las componentes frecuenciales más relevantes,
- reducir el número de coeficientes extraídos,
- seleccionar la familia o familias de wavelets que mejor se adapten a las características intrínsecas de la señal electroencefalográfica y
- completar la arquitectura con la transformada de Fourier para obtener la información frecuencial filtrada por la transformada wavelet.

El diseño de la arquitectura óptima pasa en primer lugar por la elección de la wavelet madre adecuada para el tratamiento de las señales electroencefalográficas. En esta aplicación y en cualquier otra, la elección es, como podrá comprobarse, una labor extremadamente compleja. En la literatura disponible, ha sido ampliamente aceptada la opción de seleccionar una wavelet madre cuyo aspecto sea similar al de las componentes que se quieren localizar ([FL03] por ejemplo). Sin embargo, existen trabajos como los desarrollados por Mallat ([Mal99]) o por Cui y Song ([CS06]) que proponen algunas consideraciones interesantes como son:

- Posibilidad de implementar la transformada wavelet discreta.
- Soporte compacto: el hecho de que el conjunto de puntos donde la función wavelet no es nula sea un conjunto cerrado y acotado, es decir su soporte sea compacto, tiene implicaciones sobre la precisión de la descomposición wavelet, así como en su capacidad de localización espectro-temporal y la facilidad de implementación ([CS06]).
- Características de la ventana tiempo frecuencia: si se denominan  $t_0$  y  $\sigma$ , y  $\hat{t}_0$  y  $\hat{\sigma}$  a los centros y radios de la wavelet  $\psi(t)$  en el dominio del tiempo y la frecuencia respectivamente, la capacidad de localización espectro-temporal de la función está

relacionada con el área de lo que se denomina ventana tiempo frecuencia y que es igual al producto  $4\sigma\hat{\sigma}$ . Cuanto más concentrada se encuentre la wavelet en ambos planos (tiempo y frecuencia), es decir, cuanto menor sea el área de esta ventana, mejor será su resolución. Este parámetro está limitado por el principio de Heisenberg de forma que  $\sigma\hat{\sigma} \geq \frac{1}{4\pi}$ . En otras palabras, la resolución espectro-temporal está limitada y no puede reducirse indefinidamente con independencia de la wavelet que se utilice.

- Simetría: todas las wavelets simétricas y antisimétricas presentan fases lineales, lo que implica su invariabilidad a desplazamientos lineales de fase y las hace especialmente adecuadas para trabajar con algún tipo de distorsiones (deformaciones, solapamiento de imágenes, etc.).
- Ortonormalidad y biortonormalidad: las wavelets ortonormales, citadas ya anteriormente, presentan importantes ventajas, reduciendo al máximo la redundancia de información en los coeficientes que generan. Sin embargo, este tipo de funciones presenta algunas fuertes restricciones al no permitir, por ejemplo, el diseño de wavelets simétricas de soporte compacto. El concepto de biortonormalidad, una forma débil de ortonormalidad en la que se emplean dos conjuntos distintos de funciones wavelets y de escalado para la descomposición y reconstrucción de las señales, rebaja en cierta medida esas exigencias, permitiendo un grado más de libertad en el diseño de las funciones para poder ser adaptadas a determinados tipos de problemas.
- Momentos nulos: se dice que la función wavelet  $\psi(t)$  tiene  $M$  momentos nulos si para  $0 \leq m \leq M$  con  $m \in \mathbb{Z}$  y  $M \in \mathbb{Z}$  se cumple que  $\int_{\mathbb{R}} t^m \psi(t) dt = 0$ . Mayor número de momentos nulos implica que la transformada wavelet generará coeficientes muy pequeños o nulos en escalas más finas, lo que suele mejorar la eficiencia de la transformada, no sólo para aplicaciones de compresión de datos, sino también en términos de eficiencia computacional y filtrado de ruido ([Mal99]).
- Regularidad: relacionada con la diferenciabilidad y suavidad de las funciones wavelet y de escalado, da idea de la pendiente con la que cae la respuesta en frecuencia de dichas funciones y, por tanto, está también relacionada con la capacidad de localización espectral de las wavelets (para mayor detalle sobre su relevancia y su relación con los momentos nulos pueden consultarse [Rio93] y [BGG98]).

A pesar del desarrollo experimentado en el diseño de distintas familias de wavelets en los últimos años, es imposible encontrar aquella que reúna de forma ideal las características anteriores. El concepto ideal depende, además, de la aplicación concreta en la que se desee emplear la transformada wavelet. En cualquier caso, para el análisis de señales electroencefalográficas realizado en el ámbito de esta tesis, teniendo en cuenta la literatura descrita y los requisitos de una BCI, se han estudiado en detalle finalmente las siguientes familias y sus correspondientes subfamilias:

- **Haar**, única wavelet con soporte compacto, ortonormalidad y simetría, pero discontinua y con un único momento nulo.
- **Daubechies**, **Symmlets** y **Coiflets** (denotadas por dbN, symN y coifN) que presentan ortonormalidad, soporte compacto y número de momentos nulos igual a  $N$  para dbN y symN y  $2N$  para coifN. Las primeras son asimétricas mientras que el resto presentan cierta simetría, aunque una pobre regularidad en todos los casos.
- **Biorthogonal** y **Reverse Biorthogonal** (denotadas por biorNr.Nd y rbioNr.Nd) que presentan biortogonalidad, soporte compacto, Nd momentos nulos, cierta regularidad y simetría.

En todos los casos, se han elegido wavelets que permitan llevar a cabo la transformada discreta por su facilidad de implementación, su carga computacional y su velocidad de ejecución.

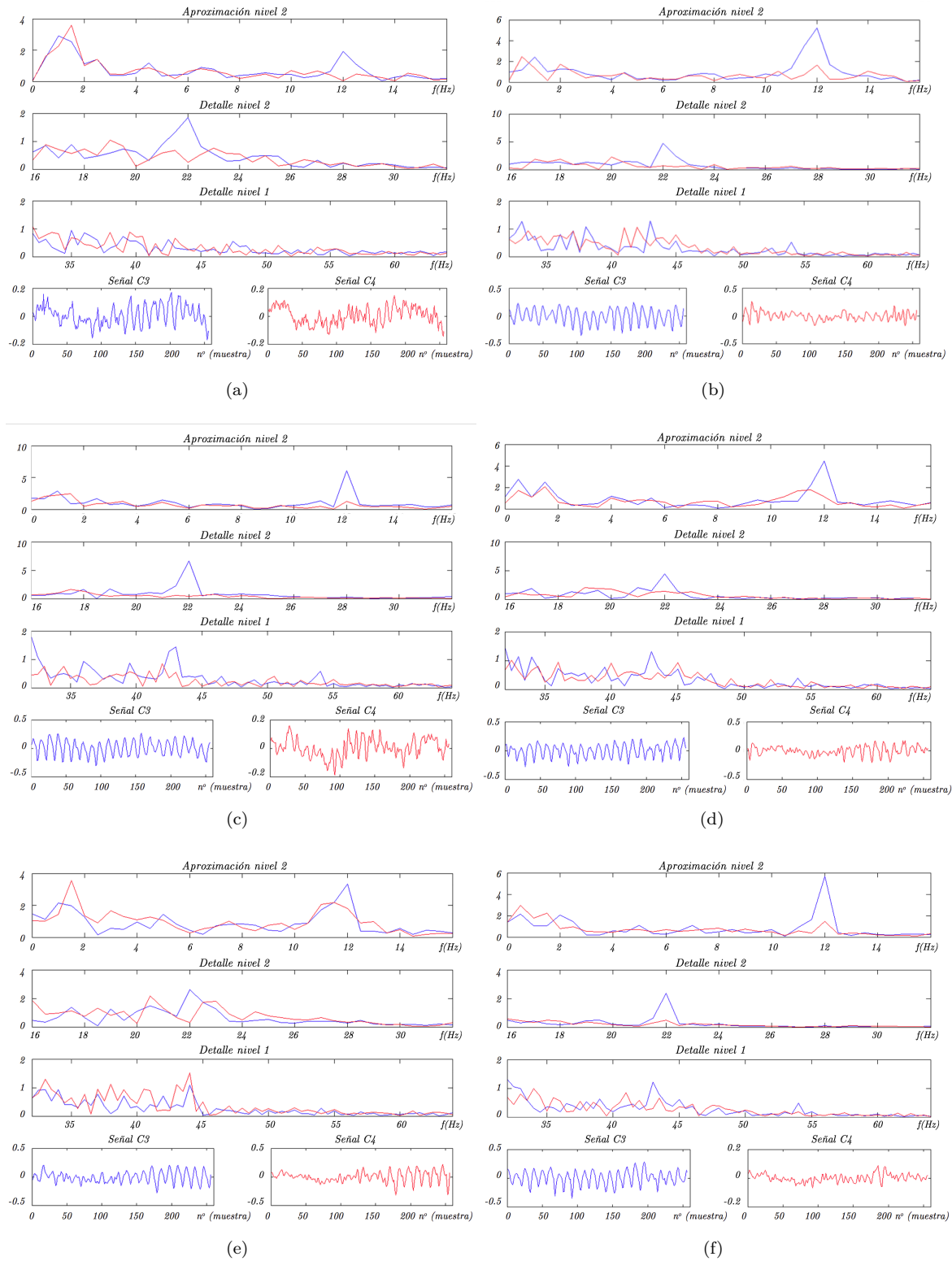
Finalmente, a la luz de todo lo expuesto en los apartados anteriores, el sistema de extracción de características propuesto pretende explotar la combinación de la potencia de la transformada wavelet con la transformada de Fourier. Para ello, se han llevado a cabo múltiples experimentos utilizando distintas combinaciones de ambas transformadas y estudiando la eficiencia de todas las posibles familias de wavelets disponibles.

Las figuras 3.16 y 3.17 muestran la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de primer y segundo orden obtenidos mediante la transformada wavelet discreta *rbiorhogonal 3.5* aplicada a las mismas señales de las figuras 3.1 y 3.2.

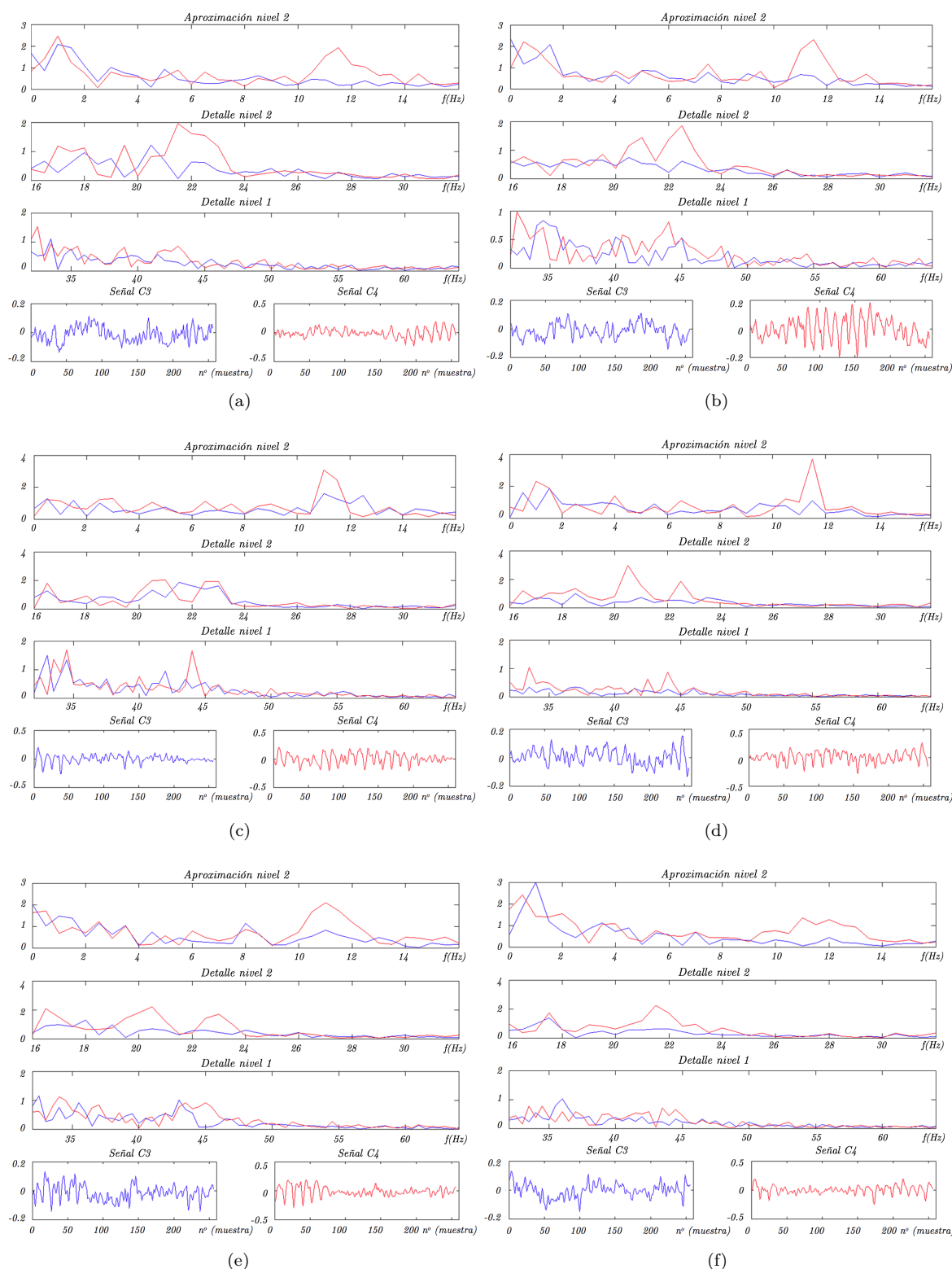
Sobre estas figuras puede estudiarse, en primer lugar, el efecto de filtrado que supone la aplicación de la transformada wavelet discreta. Puesto que las señales utilizadas han sido muestreadas a 128 Hz., el primer nivel de la transformada wavelet divide el espectro de la señal dejando esencialmente las componentes frecuenciales entre 0 y 32 Hz. en la aproximación de primer orden, y las contenidas entre 32 y 64 Hz. en el detalle de primer orden. La descomposición de segundo nivel que se aplica sobre la aproximación de primer orden genera como resultado los coeficientes de aproximación de segundo nivel con las componentes frecuenciales entre 0 y 16 Hz. y el detalle de segundo nivel con las componentes de entre 16 y 32 Hz., es decir, las bandas que contienen los ritmos mu y beta separadas.

En el estudio realizado, se implementa un tercer paso en la descomposición de la señal, no reflejado en las figuras, que llevaría a separar las frecuencias entre 0 y 8 Hz. y entre 8 y 16 Hz. en los coeficientes de tercer nivel de aproximación y detalle, respectivamente. De esta forma, la banda espectral del ritmo mu queda recogido en estos últimos coeficientes de detalle obtenidos. Como se describirá más adelante, los experimentos realizados, cuyas conclusiones se exponen en el apartado 5.8, han comprobado también esta afirmación.

En las figuras 3.16 y 3.17 puede observarse, además, que la información que brindaba la transformada de Fourier aislada con un pico claramente diferenciado en una componente



**Figura 3.16:** Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de primer nivel y de detalle y aproximación de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos  $C_3$  (azul) y  $C_4$  (rojo) durante seis experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda. Mismas señales analizadas mediante la transformada de Fourier en la figura 3.1.

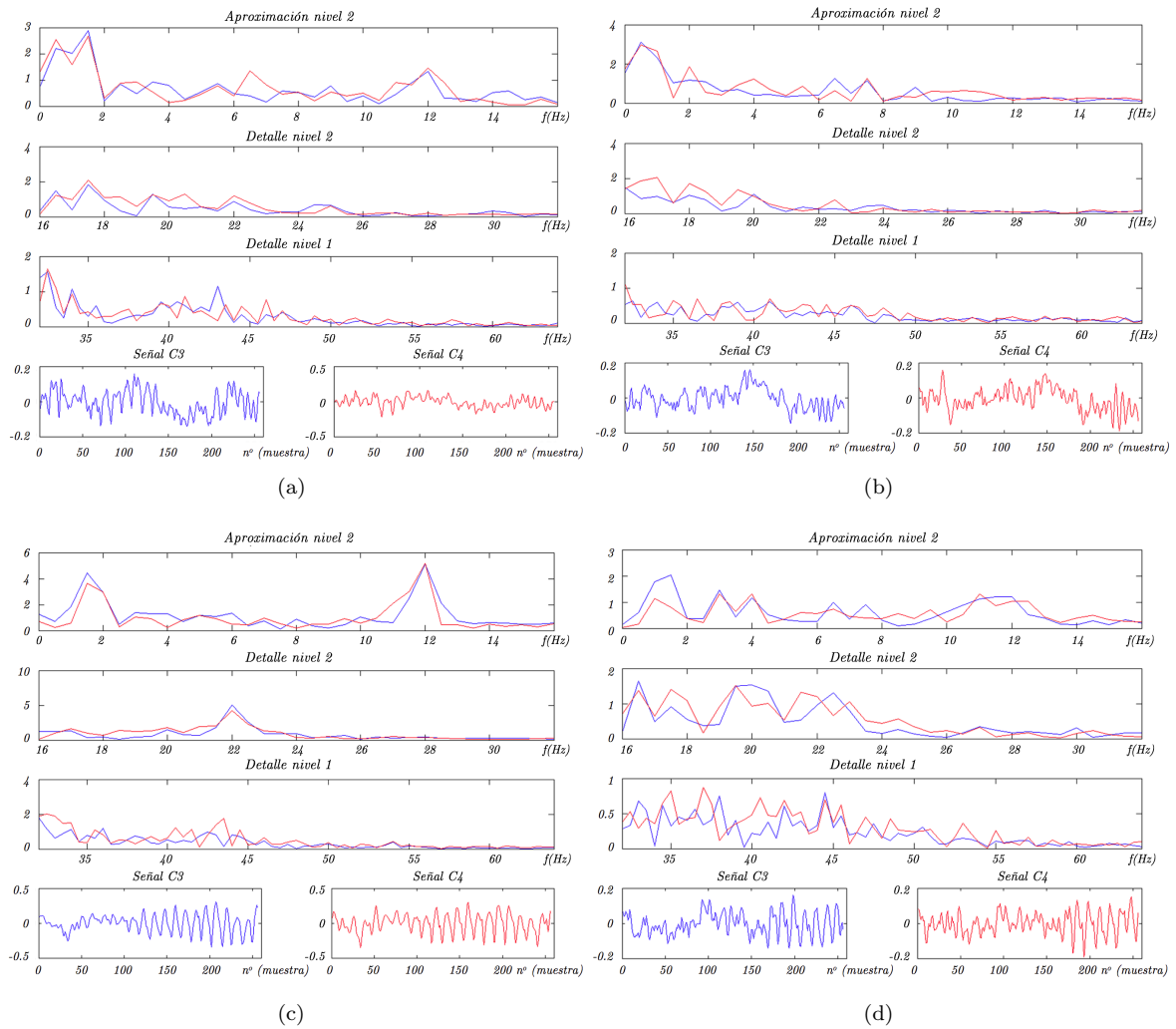


**Figura 3.17:** Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de primer nivel y de detalle y aproximación de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos  $C_3$  (azul) y  $C_4$  (rojo) durante seis experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano derecha. Mismas señales analizadas mediante la transformada de Fourier en la figura 3.2.



frecuencial concreta, entorno a los 10 Hz., se mantiene en esta arquitectura. De esta forma, las gráficas correspondientes a los experimentos en los que el sujeto está pensando en mover su mano izquierda (figura 3.16) presentan un pico diferenciado en el electrodo  $C_3$  (en azul) en la aproximación de nivel 2 que recoge dicha banda de frecuencias. De igual manera, las gráficas obtenidas a partir de experimentos en los que el usuario pensaba en mover su mano derecha (3.17) presentan ese pico en la señal recogida en el electrodo  $C_4$  (en rojo). En estos casos, aparece, además, claramente diferenciada una componente frecuencial en la banda espectral recogida en el detalle de nivel 2, en la banda beta, más difícil de diferenciar en las figuras 3.1 y 3.2 donde sólo se aplicaba la transformada de Fourier.

Los resultados de combinar la transformada de Fourier sobre los coeficientes wavelet en el caso de las señales de la figura 3.3, cuya transformada de Fourier no parecía facilitar información suficiente para su clasificación, se muestran en las figuras 3.18.

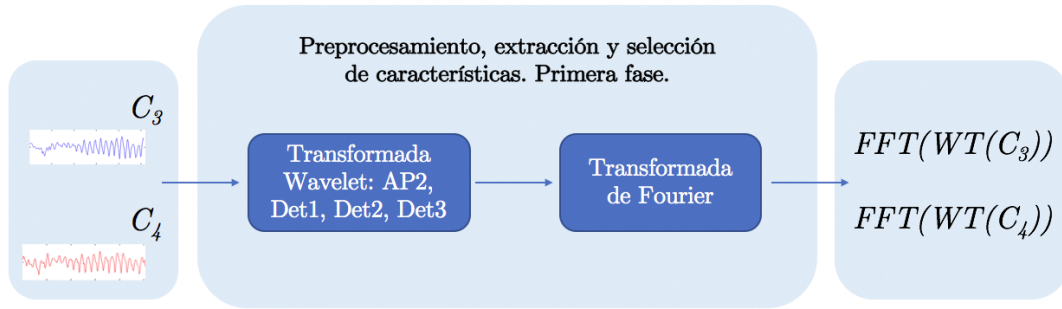


**Figura 3.18:** Transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de primer nivel y de detalle y aproximación de segundo nivel de las señales grabadas en los electrodos  $C_3$  (azul) y  $C_4$  (rojo) durante experimentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda (3.18(a) y 3.18(b)) y su mano derecha (3.18(c) y 3.18(d)).



Estos resultados obtenidos muestran patrones no tan definidos como los anteriores, pero, como se comprobará posteriormente, un método de clasificación adecuado será capaz de traducir estos datos correctamente y no así los obtenidos a partir de las mismas señales en el caso de la aplicación exclusiva de la transformada de Fourier.

En definitiva, y según todo lo expuesto hasta el momento, la arquitectura propuesta, cuyo esquema general se muestra en la figura 3.19, responde a la hipótesis de que la transformada wavelet discreta aplicada sobre una señal electroencefalográfica puede filtrar el ritmo mu en los coeficientes de aproximación de segundo nivel o de detalle de tercer nivel y el ritmo beta en los coeficientes de detalle de segundo nivel. Su aplicación reduce el número de coeficientes que conforman el vector de entrada de la etapa de clasificación posterior, mejorando sus prestaciones. La utilización de la transformada de Fourier sobre la descomposición wavelet extrae, además, claramente diferenciadas, las componentes de dichos ritmos para su clasificación posterior.



**Figura 3.19:** Arquitectura de preprocesamiento y extracción de características basada en la combinación de la transformada de Fourier y la transformada wavelet.

En el capítulo 5, en los apartados 5.5.3, 5.6.3 y 5.7.3, se describen en profundidad todos los experimentos realizados para verificar estas hipótesis y las conclusiones extraídas, comparando, además, los rendimientos de todas las subfamilias de wavelets descritas.

### 3.3. Análisis de componentes principales

El análisis de componentes principales (en adelante ACP) es una técnica estadística que permite sintetizar un conjunto de datos reduciendo su dimensionalidad con una pérdida mínima de información.

El objetivo de este algoritmo es estudiar las relaciones que presentan las variables aleatorias de interés mediante su transformación en otro conjunto de variables incorreladas entre sí, denominado conjunto de componentes principales, eliminando la redundancia de información.

Estas componentes se obtienen en orden decreciente de importancia, de modo que las primeras resumen la mayor variabilidad de los datos originales. Como se detallará posteriormente, un número pequeño de estas primeras componentes pueden llegar a representar la mayor parte de la información contenida en los datos, permitiendo reducir considerablemente su dimensionalidad.

#### 3.3.1. Conceptos previos

##### 3.3.1.1. Regresión múltiple lineal

El análisis de componentes principales puede describirse desde distintos puntos de vista, como se irá comprobando a lo largo de este apartado. En primer lugar, y por su analogía con el estudio que se hará posteriormente del algoritmo basado en mínimos cuadrados parciales, se iniciará esta explicación tomando como punto de partida el análisis de regresión múltiple lineal.

Como es conocido, el problema de regresión múltiple lineal parte de la observación y medida de una serie de variables escalares que se denominarán en adelante  $X_1, X_2, \dots, X_m$  y de, simplificando inicialmente, una variable  $Y$  que se desea expresar en función de las primeras, mediante una relación lineal como la mostrada en la ecuación 3.55.

$$Y = b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_mX_m + e = \sum_{i=1}^m b_iX_i + e = \vec{X}^T \vec{b} + e \quad (3.55)$$

En general,  $X_i$  reciben el nombre de variables independientes,  $Y$  el de variable dependiente, los coeficientes  $b_i$  se conocen como sensibilidades y  $e$  es el error o residuo.

Al disponer de  $n$  observaciones o registros de la variable dependiente  $Y$ , y de los valores de cada  $X_i$  que dan lugar a dichas observaciones, se puede plantear un sistema de ecuaciones cuya representación matricial se muestra en la ecuación 3.56.

$$\vec{y}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times m} \vec{b}_{m \times 1} + \vec{e}_{n \times 1} \quad (3.56)$$

La disquisición acerca del valor óptimo de  $\vec{b}$  para poder reducir o anular el error  $\vec{e}$  en función de las magnitudes de  $m$  y  $n$  es ampliamente conocida y está descrita con detalle en la literatura básica relacionada con el tema (pueden consultarse, por ejemplo, [MKB80], [DS81] o [GM80]). En el caso de interés para este trabajo, la solución se obtiene a partir del método de mínimos cuadrados según la ecuación 3.57.

$$\vec{b} = \Sigma^{-1} \sigma \quad (3.57)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Sigma &= Var(\mathbf{X}) \\ \sigma &= Cov(\mathbf{X}, \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.58)$$

La posibilidad de que  $\Sigma^{-1}$  no exista por problemas de colinealidad es uno de los hechos a partir de los cuales aparecen técnicas como el análisis de componentes principales para la resolución de estas situaciones.

Todo lo dicho anteriormente es válido en caso de estudiar más de una variable dependiente. Para  $p$  variables, la ecuación 3.56 se transforma en:

$$\mathbf{Y}_{n \times p} = \mathbf{X}_{n \times m} \mathbf{B}_{m \times p} + \mathbf{E}_{n \times p} \quad (3.59)$$

### 3.3.1.2. Desarrollo del análisis de componentes principales

ACP parte de la idea de transformar el espacio de las variables independientes de entrada  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ , obteniendo un nuevo conjunto de variables  $(T_1, T_2, \dots, T_m)$ , denominadas, en algunos casos, resultados (*scores* en la literatura inglesa), incorreladas entre sí y cuyas varianzas vayan decreciendo progresivamente<sup>6</sup>. Cada  $T_j$  será una combinación lineal de las  $X_1, X_2, \dots, X_m$  originales, de forma que satisfará la ecuación 3.60.

$$T_j = a_{j1}X_1 + a_{j2}X_2 + \dots + a_{jm}X_m = \vec{a}_j^T \vec{X} \quad (3.60)$$

siendo  $\vec{a}_j^T = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm})$  un vector de constantes con módulo unidad.

La primera componente,  $T_1$ , se calcula eligiendo  $\vec{a}_1$  de forma que se maximice su varianza. Esta varianza puede expresarse, por las propiedades básicas de las transformaciones de vectores aleatorios, según se muestra en la ecuación 3.61.

$$var(T_1) = var(\vec{a}_1^T \vec{X}) = \vec{a}_1^T \mathbf{C}_X \vec{a}_1 \quad (3.61)$$

donde la matriz  $\mathbf{C}_X$  es la matriz de covarianza:

<sup>6</sup>Para consultar una descripción más detallada de este análisis, véanse, por ejemplo, [Jol02] o [Shl05].

$$\mathbf{C}_X = \begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_m) \\ \text{cov}(X_1, X_2) & \text{var}(X_2) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_1, X_m) & \text{cov}(X_2, X_m) & \dots & \text{var}(X_m) \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar el vector  $\vec{a}_1$  que maximiza  $\text{var}(T_1)$  y tiene módulo unidad, se concluye que la ecuación que hay que resolver es la mostrada en 3.63.

$$(\mathbf{C}_X - \lambda I) \vec{a}_1 = 0 \quad (3.63)$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius, para que la ecuación tenga solución no trivial, la matriz  $\mathbf{C}_X - \lambda I$  debe ser singular, es decir, su determinante debe ser nulo.

$$|\mathbf{C}_X - \lambda I| = 0 \quad (3.64)$$

En otras palabras,  $\lambda$  y  $\vec{a}_1$  son un autovalor de la matriz  $\mathbf{C}_X$  y su autovector asociado, respectivamente. La matriz de covarianza, simétrica y semidefinida positiva, tendrá generalmente  $m$  autovalores positivos o nulos. Para elegir el autovalor que maximiza la varianza basta con desarrollar un poco más la ecuación 3.61.

$$\text{var}(T_1) = \vec{a}_1^T \mathbf{C}_X \vec{a}_1 = \vec{a}_1^T \lambda \vec{a}_1 = \lambda \quad (3.65)$$

Por lo tanto, maximizar la varianza de  $T_1$  implica elegir como vector  $\vec{a}_1$  el autovector asociado al mayor autovalor de la matriz  $\mathbf{C}_X$ .

El resto de componentes principales se obtienen mediante un razonamiento análogo al anterior imponiendo a las variables  $T_2, \dots, T_m$  la condición de ser incorreladas con las anteriores. En el caso de  $T_2$ , por ejemplo,  $\vec{a}_2$  ha de satisfacer la ecuación 3.66.

$$\text{cov}(T_2, T_1) = \text{cov}(\vec{a}_2^T X, \vec{a}_1^T X) = \vec{a}_2^T \mathbf{C}_X \vec{a}_1 = 0 \quad (3.66)$$

Dado que  $\mathbf{C}_X \vec{a}_1 = \lambda I \vec{a}_1$ , la ecuación anterior puede desarrollarse:

$$\vec{a}_2^T \mathbf{C}_X \vec{a}_1 = \vec{a}_2^T \lambda I \vec{a}_1 = 0 \Rightarrow \vec{a}_2^T \vec{a}_1 = 0 \quad (3.67)$$

Es decir,  $\vec{a}_2$  debe maximizar la varianza de  $T_2$  y ser, además, ortogonal a  $\vec{a}_1$ . La aplicación del método de Lagrange lleva a una ecuación equivalente a la ecuación 3.63 con  $\vec{a}_2$  y, por tanto, a la elección del autovector asociado al segundo mayor autovalor de la matriz  $\mathbf{C}_X$ .

El mismo razonamiento se extiende progresivamente a todas las variables  $T_j$ , obteniendo la matriz de transformación  $\mathbf{A}$  formada por los autovectores de  $\mathbf{C}_X$  ordenados en columnas según la magnitud de sus autovalores asociados. Conceptualmente, la transformación de espacios vendría dada por la ecuación matricial 3.68:

$$\vec{T} = \mathbf{A}^T \vec{X} \quad (3.68)$$

Dado un conjunto de datos inicial  $\mathbf{X}_{n \times m}$ ,  $n$  observaciones de las  $m$  variables originales registradas como se explicó anteriormente, estos datos podrían llevarse al espacio transformado de las nuevas variables  $T_j$  mediante la ecuación 3.69.

$$\mathbf{T}_{n \times m} = \mathbf{X}_{n \times m} \mathbf{A}_{m \times m} \quad (3.69)$$

La matriz  $\mathbf{T}_{n \times m}$  podría entenderse como las  $n$  observaciones de las  $m$  nuevas variables  $T_j$ , en caso de que dichas variables fueras observables. Es interesante detenerse en cada una de las columnas que forman esta matriz,  $\vec{t}_i$ , y que pueden obtenerse de forma independiente según la ecuación 3.70.

$$\vec{t}_i = \mathbf{X} \vec{a}_i \quad (3.70)$$

Cada columna es, por tanto, la proyección del conjunto de datos original sobre la dirección correspondiente al vector  $\vec{a}_i$ .

Es posible recuperar el espacio original al tiempo que los datos originales a partir de los datos transformados mediante la ecuación 3.71.

$$\mathbf{X}_{n \times m} = \mathbf{T}_{n \times m} \mathbf{A}_{m \times m}^T \quad (3.71)$$

O, lo que es idéntico, la descomposición en componentes principales permite representar la matriz de datos original  $\mathbf{X}$  como suma de  $m$  matrices, de dimensión  $n \times m$  según la ecuación 3.72.

$$\mathbf{X}_{n \times m} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \cdots + \mathbf{M}_m = \vec{t}_1 \vec{a}_1^T + \vec{t}_2 \vec{a}_2^T + \cdots + \vec{t}_m \vec{a}_m^T = \mathbf{T} \mathbf{A}^T \quad (3.72)$$

Analizando los términos de la descomposición de la matriz  $\mathbf{X}$  según 3.72, se puede profundizar un poco más en el significado del análisis de componentes principales. Sustituyendo el valor de  $\vec{t}_i$  en  $\mathbf{M}_i$  se obtiene:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{X} \vec{a}_i \vec{a}_i^T \quad (3.73)$$

Como se ilustrará posteriormente con un ejemplo en tres dimensiones, la matriz  $\mathbf{M}_i$  supone, como ya se ha dicho, la transformación de los datos originales de la matriz  $\mathbf{X}$

sobre la dirección de  $\vec{a}_i$ , lo que genera cada  $\vec{t}_i$ , y su posterior recuperación en el espacio original a través de la multiplicación por  $\vec{a}_i^T$ .  $\mathbf{M}_i$  es, en definitiva, la proyección de los datos de  $\mathbf{X}$  en el autovector  $\vec{a}_i$ . Al haber obtenido los vectores  $\vec{a}_i$  de acuerdo a la varianza de los datos originales,  $\vec{a}_1$  es el vector que conserva la mayor variabilidad de los datos, es, en otras palabras, el que mejor se ajusta a su distribución original y, por tanto, hace de  $\mathbf{M}_1$  la aproximación que más se acerca a la matriz original. Por la misma razón,  $\mathbf{M}_2$  es la segunda aproximación más relevante, la que más información no representada en  $\mathbf{M}_1$  almacena, etc.

Este hecho introduce la posibilidad de reducir la dimensión del espacio y el conjunto de datos que se viene reseñando como uno de los objetivos más destacados del análisis de componentes principales. Esta reducción puede llevarse a cabo si existe un conjunto de autovectores con autovalores significativamente mayores que el resto, lo que indicaría que los datos están concentrados en determinadas direcciones preferentes y que pueden aproximarse utilizando únicamente las proyecciones de dichos datos sobre las variables transformadas  $T_j$ , con  $j \in (1, 2, \dots, r < m)$ , correspondientes a dichos vectores. La matriz de transformación, que se denominará a partir de ahora matriz de características o  $\mathbf{F}$ , vendrá dada por la ecuación 3.74.

$$\mathbf{A}_{reducida} = \mathbf{F} = \left( \vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_r \right)_{m \times r} \quad (3.74)$$

La transformación de los datos originales al nuevo espacio generado se realizará mediante la particularización de la ecuación 3.69, que ahora queda según 3.75.

$$\mathbf{T}_{n \times r} = \mathbf{X}_{n \times m} \mathbf{F}_{m \times r} \quad (3.75)$$

Y, en definitiva,  $\mathbf{X}$  puede aproximarse con una pérdida mínima de información como indica 3.76.

$$\mathbf{X}_{n \times m} \approx \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_r = \mathbf{T} \mathbf{F}^T \quad (3.76)$$

Por tanto, se transforma un espacio original de dimensión  $m$  en un espacio transformado de dimensión  $r$  con una pérdida mínima de información para la distribución de los datos con los que se está trabajando. ACP, en consecuencia, desvela las direcciones prioritarias en las que se distribuye la información y revela la estructura de dichos datos.

Finalmente, la elección del número de autovectores  $r$  con el que se crea la matriz de características suele llevarse a cabo con algún criterio relacionado con la relevancia de los autovalores correspondientes. Un método muy sencillo es la utilización de un gráfico de sedimentación, que consiste en representar gráficamente la magnitud de los autovalores en orden decreciente, desechando aquellos en los que la representación se allana. Un criterio algo más formal (véase por ejemplo [FSMVE07]) consiste en seleccionar aquellos cuya

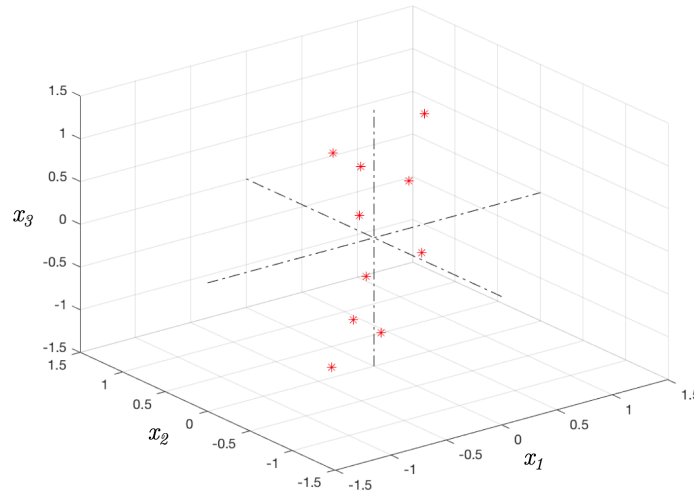
magnitud explica un determinado tanto por ciento de la variabilidad total de los datos, como se muestra en la ecuación 3.77 para un límite de un 90 %.

$$\left( \frac{\sum_{j=1}^r \lambda_j}{\sum_{j=1}^m \lambda_j} \right) \geq 0,9 \quad (3.77)$$

### 3.3.1.3. Un ejemplo ilustrativo

Se propone a continuación un ejemplo<sup>7</sup> que ilustra los conceptos anteriores para poder profundizar mejor posteriormente en su aplicación a las señales electroencefalográficas.

Supóngase un caso sencillo en el que se trabajara con tres supuestas variables aleatorias independientes  $X_1, X_2, X_3$  y en el que se dispone de 10 observaciones que conformarían la matriz  $\mathbf{X}_{10 \times 3}$  y que se representan en la figura 3.20 como conjunto de datos inicial.



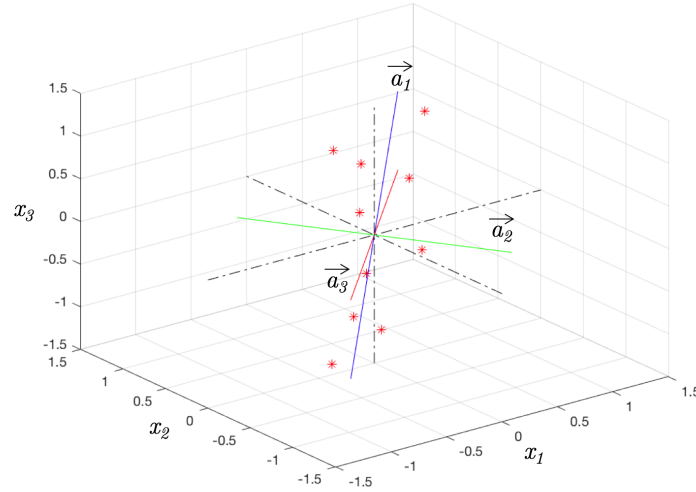
**Figura 3.20:** Matriz de datos para el ejemplo ilustrativo con 10 observaciones de tres variables de entrada.

Calculando los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza de estos datos, se obtendrían:

$$\text{Autovalores} = \begin{pmatrix} 0,0008 \\ 0,0510 \\ 1,4035 \end{pmatrix} \quad \text{Autovectores} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} -0,0497 & 0,7611 & 0,6467 \\ 0,3431 & -0,6211 & 0,7046 \\ -0,9380 & -0,1869 & 0,2920 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

En la figura 3.21, se representan con líneas continuas los autovectores obtenidos destacándose en azul el autovector asociado al mayor autovalor. Como puede comprobarse, este autovector es el que marca la dirección en la que la dispersión de los datos es mayor.

<sup>7</sup>El ejemplo se ha preparado modificando y completando el disponible en [Smi02].



**Figura 3.21:** Matriz de datos del ejemplo con los autovectores de la matriz de covarianza. En azul, la dirección marcada por el autovector asociado al mayor autovalor de la matriz de covarianza de los datos utilizados en el ejemplo. En verde y rojo, las direcciones de los otros dos autovectores obtenidos.

Como se ha justificado anteriormente, los autovectores con autovalores más significativos van a marcar direcciones preferentes en las que está contenida de alguna forma la información más relevante de los datos de entrada.

En el caso del ejemplo planteado, se puede decidir que la matriz de características quede formada únicamente por el autovector asociado al mayor autovalor, significativamente más grande que los otros dos y que explicaría el 96,44 % de la variación de los datos según el criterio citado anteriormente. La matriz de características formada en este caso por un único vector se muestra en la ecuación 5.7.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0,6467 \\ 0,7046 \\ 0,2920 \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

El espacio transformado estaría constituido, por tanto, por una única variable  $T_1$ , reduciendo la dimensión del espacio original de 3 a 1. Los datos originales se transformarían mediante la matriz de características según la ecuación 3.75, que queda particularizada para este ejemplo de la siguiente forma:

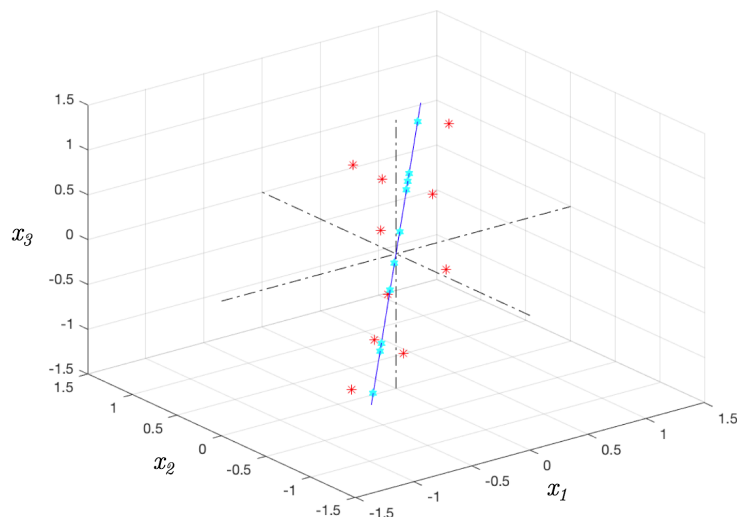
$$\mathbf{T}_{10 \times 1} = \vec{t}_1 = \mathbf{X}_{10 \times 3} \mathbf{F}_{3 \times 1} \quad (3.80)$$

Para comprobar que la transformación ha guardado correctamente las características de los datos originales, puede aplicarse la transformación inversa según 3.76 que, para este ejemplo particular, recupera una aproximación de  $\mathbf{X}$  que se limita a  $\mathbf{M}_1$ :

$$\mathbf{X}_{10 \times 3} \approx \mathbf{M}^1 = \mathbf{T} \mathbf{F}^T \quad (3.81)$$

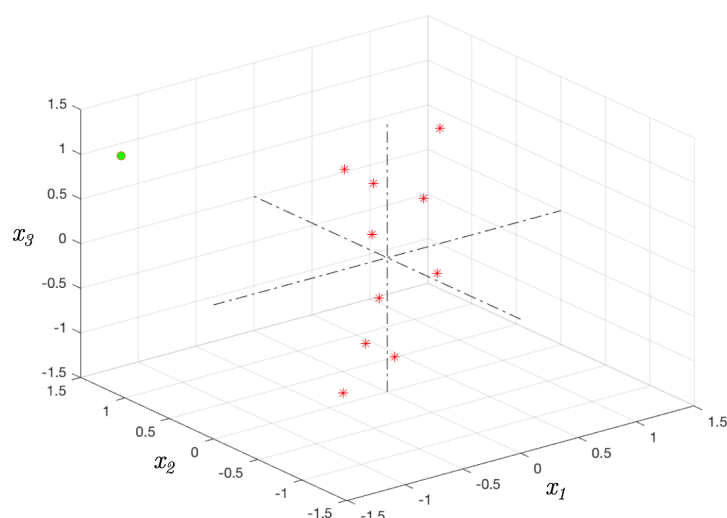


Los puntos recuperados, en azul claro en la figura 3.22, no son idénticos a los originales, son, de hecho, la proyección de éstos sobre el autovector más significativo. Se ha perdido algo de información, pero, sin embargo, la distancia entre los datos recuperados y originales es relativamente pequeña.



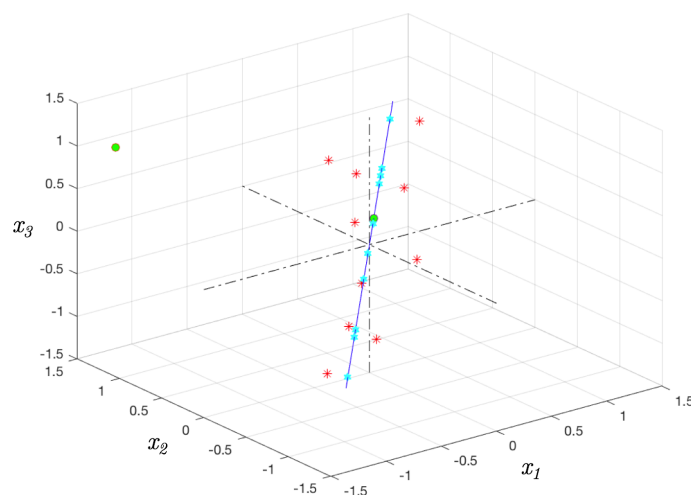
**Figura 3.22:** Representación simultánea de los datos originales, en rojo, y los recuperados mediante la transformación inversa, 3.76, en azul claro.

La capacidad de este método como técnica de extracción de características para una posterior clasificación se ilustra incluyendo un punto nuevo en el ejemplo anterior, representado por un círculo verde en la figura 3.23, que no pertenece a la distribución de puntos del conjunto de datos inicial, a partir de los cuales se obtuvieron los autovalores y autovectores del ejemplo.

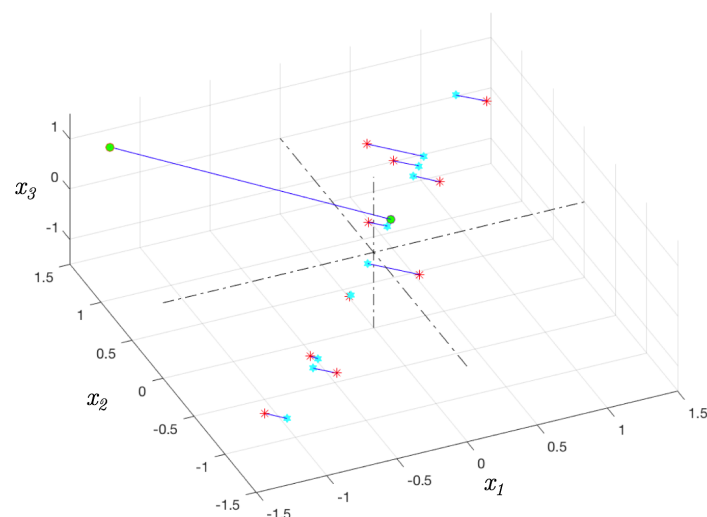


**Figura 3.23:** Conjunto de observaciones iniciales, en rojo, con un nuevo dato de entrada, en verde, de una clase distinta a las anteriores.

Debería probarse que, en este caso, la transformación mediante la matriz de características obtenida a partir del conjunto original no es capaz de capturar las características de este nuevo punto. Aplicando la transformación y recuperación de los datos de entrada según el algoritmo expuesto, cuyo resultado puede verse en la figura 3.24, se comprueba que, efectivamente, las distancias entre cualquiera de los puntos del conjunto original y los recuperados es menor que la distancia homóloga para el nuevo dato atípico añadido (el detalle de estas distancias se ha destacado en la figura 3.25).



**Figura 3.24:** Representación simultánea de los valores originales del conjunto de datos de entrada y los valores recuperados después de las transformaciones explicadas.



**Figura 3.25:** Representación gráfica, líneas azules, de las distancias entre valores originales y recuperados de todos los datos.

En conclusión, como se describía al principio de este apartado, ACP permite sintetizar información reduciendo la dimensión de un conjunto de datos. Como también se ha visto, esta transformación implica una pérdida de información, cuya relevancia dependerá de

las características propias de los datos y de la elección de los autovectores que formen la matriz de características.

Finalmente, para cerrar la observación sobre regresión lineal múltiple a partir de la cual se inició la descripción de ACP, la ecuación 3.56, cuya solución planteaba problemas en la existencia del factor  $\Sigma^{-1}$ , se transforma en este caso en la ecuación 3.82.

$$\vec{y}_{n \times 1} = \mathbf{T}_{n \times r} \vec{b}_{r \times 1} + \vec{e}_{n \times 1} \quad (3.82)$$

donde

$$\mathbf{T}_{n \times r} = \mathbf{X}_{n \times m} \mathbf{F}_{m \times r} \quad (3.83)$$

y la solución (ecuación 3.84) no presenta los problemas citados anteriormente.

$$\vec{b} = (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \vec{y} \quad (3.84)$$

### 3.3.2. Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante ACP

En primer lugar, cabe destacar el hecho de que, como se ha puesto de manifiesto, parte importante de la información generada en las señales EEG al realizar tareas mentales relacionadas con imaginación motora, está contenida en sus patrones frecuenciales. Por esta razón, se mantendrá abierta en esta segunda arquitectura de extracción de características la posibilidad de combinar el uso del análisis de componentes principales con la transformada de Fourier y la transformada wavelet. Como se verá en adelante, en caso de ser necesarias estas transformadas, el valor añadido del algoritmo ACP se verá reflejado en la simplificación de la etapa de clasificación.

El diseño de una arquitectura para la aplicación del algoritmo ACP a la extracción de características de señales electroencefalográficas implica necesariamente una reflexión previa sobre la propia naturaleza de estas señales. Como se ha comentado ampliamente, la señal electroencefalográfica presenta una gran cantidad de ruido que enmascara la información verdaderamente relevante para su clasificación. Este ruido es, a priori, la parte predominante de las señales registradas, lo que puede traducirse en que constituya un conjunto significativo de **componentes principales**. Se puede, por tanto, plantear la hipótesis de que, cuando se aplica ACP a señales EEG, independientemente del canal y de la tarea mental para la que hayan sido grabadas, la aplicación del algoritmo ACP puede generar una serie de autovectores con autovalores de magnitud relevante que reflejen la presencia de ruido.

Obedeciendo a esta hipótesis, que será evaluada en el capítulo 5, convendría eliminar de la matriz de características algunos de los autovectores que una aplicación generalista de

ACP podría seleccionar. Tras la aplicación de esta hipótesis, la matriz de características de las señales EEG vendría dada por la ecuación 3.85.

$$\mathbf{F}_{\text{EEG}} = \begin{pmatrix} \vec{v}_p & \vec{v}_{p+1} & \dots & \vec{v}_q \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

donde los autovectores elegidos para la matriz de características,  $(\vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_q)$ , corresponden a los autovalores  $\lambda_p, \lambda_{p+1} \dots \lambda_q$  tales que:

$$\lim_{sup} > \lambda_i > \lim_{inf} \quad i \in (p, p+1, \dots, q) \quad (3.86)$$

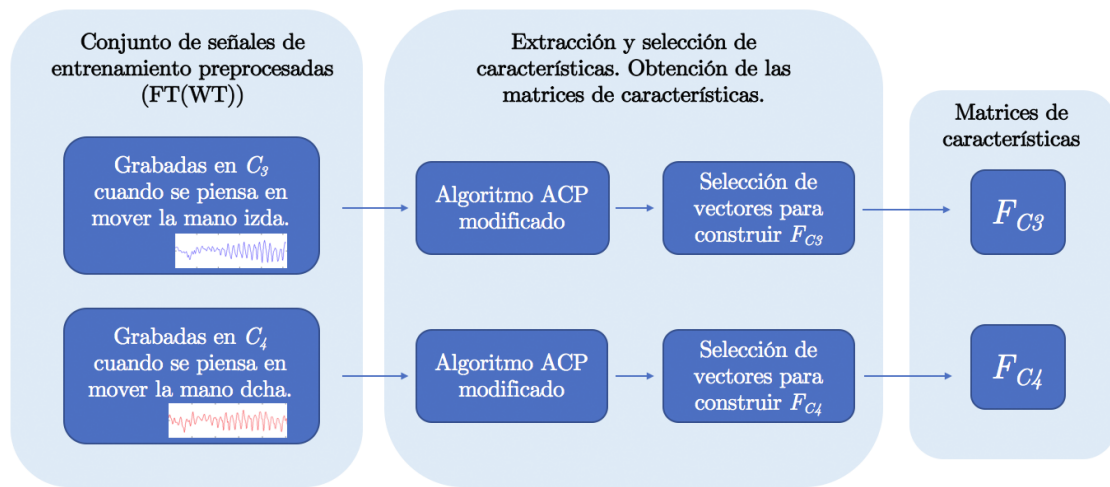
Es decir, para construir la matriz de características se tomarán los autovectores con autovalores mayores que un determinado límite inferior,  $\lim_{inf}$ , pero descartando los de mayor magnitud, con autovalores mayores que  $\lim_{sup}$ , derivados hipotéticamente de la presencia de ruido. A priori no es posible fijar el valor de estos límites, por lo que se realizará un amplio estudio experimental sobre su selección e influencia en el rendimiento de la arquitectura final.

Existe una segunda peculiaridad relevante en la aplicación del análisis de componentes principales en el ámbito de una BCI como la que se trata en este trabajo. Mientras que en una aplicación general del análisis de componentes principales se parte de un conjunto de datos con unas características comunes predominantes que se desea localizar, en el caso de esta interfaz se parte de dos conjuntos de datos como son las señales registradas en el canal  $C_3$  por un lado y las recogidas en  $C_4$  por otro. Como se ha resaltado anteriormente, la realización de la tarea mental que consiste en imaginar el movimiento de la mano izquierda genera la aparición de un patrón característico en el canal  $C_3$ , ipsilateral al movimiento, mientras que la tarea que consiste en imaginar el movimiento de la mano derecha lo provoca en el canal  $C_4$ . Sobre este hecho se puede plantear una segunda hipótesis de interés en el diseño de esta arquitectura, al suponer que la extracción de las componentes principales de las señales electroencefalográficas generadas en distintas tareas mentales debe realizarse de forma independiente para cada tarea y a partir de las señales cuyos patrones sean relevantes para cada una de ellas.

En otras palabras, esta hipótesis plantea que no tiene sentido tratar de extraer las componentes principales de la tarea mental que consiste en imaginar el movimiento de la mano izquierda a partir de las señales del canal  $C_4$ . Este canal recoge la actividad de la zona del cerebro que se desincroniza al realizar la tarea mental y, por tanto, recibe un patrón con información menos definida y clasificable que lo que se obtiene a partir de  $C_3$ .

En definitiva, la propuesta de la arquitectura basada en ACP para la extracción y selección de características, que se muestra en la figura 3.26, obedeciendo a la hipótesis planteada, parte de generar dos matrices de características en la fase de entrenamiento que se denominarán **especializadas**:

- Una matriz de características especializada en las características específicas de la tarea mental **imaginar el movimiento de la mano izquierda**, aplicando el algoritmo ACP modificado sobre la matriz formada únicamente por las señales grabadas en el canal  $C_3$  cuando el sujeto está imaginando el movimiento de su mano izquierda, que se denominará  $\mathbf{F}_{C_3}$ .
- Una matriz de características especializada en las características específicas de la tarea mental **imaginar el movimiento de la mano derecha**, aplicando el algoritmo ACP modificado sobre la matriz formada únicamente por las señales grabadas en el canal  $C_4$  cuando el sujeto está imaginando el movimiento de su mano derecha, que se denominará  $\mathbf{F}_{C_4}$ .



**Figura 3.26:** Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante ACP.

Con ello, se extraen las componentes principales de cada tarea mental a partir de las señales que realmente contienen sus características propias.

Con el objetivo de contrastar esta hipótesis acerca del análisis especializado de las características, en el capítulo de resultados experimentales, 5, se propone una segunda alternativa, en la que también se obtienen dos matrices, pero analizando las señales cruzadas. Es decir, se construye  $\mathbf{F}_{C_3}$  a partir de los registros en los que los sujetos imaginaban mover su mano derecha y  $\mathbf{F}_{C_4}$  a partir de los registros en los que los sujetos imaginaban mover su mano izquierda. A priori, estas matrices, que se denominarán **no especializadas**, podrían extraer características relevantes de la banda  $\beta$  que se activa, como ya se ha descrito, en el hemisferio ipsilateral al movimiento imaginado. Se propondrá y evaluará también una tercera opción, tratando de comprobar la misma hipótesis, con una arquitectura que construye las cuatro matrices descritas anteriormente (especializadas y no especializadas) con el fin de evaluar si su utilización conjunta aporta información relevante.

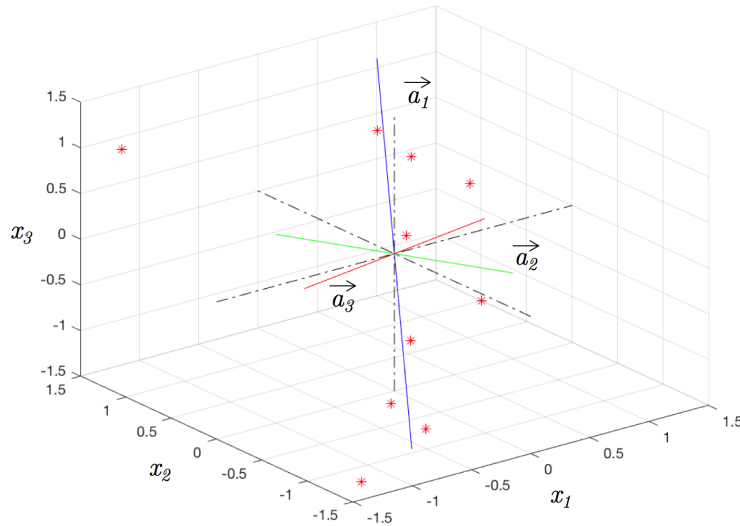
Será el clasificador diseñado para este algoritmo de extracción el que, transformado

el nuevo registro EEG mediante las matrices obtenidas, decida a qué clase pertenece la señal, como se describe en los apartados 4.2.1 y 4.2.2 del siguiente capítulo.

### 3.3.3. Análisis robusto de componentes principales

Una de las características intrínsecas de las señales electroencefalográficas utilizadas en BCI basadas en oscilaciones espontáneas, y que ya ha sido destacada previamente, es la incertidumbre sobre la calidad de las grabaciones con las que se puede realizar el entrenamiento de cualquiera de las técnicas explicadas. Más allá del ruido y los posibles artefactos, existe la posibilidad de que la ejecución mental de la tarea requerida no se realice convenientemente o con suficiente concentración.

La influencia de este tipo de datos, que se denominarán en adelante datos atípicos, en el conjunto de entrenamiento es especialmente crítica en el caso de ACP, como se describe en parte de la literatura (véanse [HS02] o [HE04] por ejemplo). Adviértase en la figura 3.27, ilustrando esta idea, el efecto de introducir el dato atípico utilizado en el ejemplo del apartado 3.3.1.3 sobre el conjunto de entrenamiento antes de extraer los autovectores y autovalores de la matriz de covarianza. Como puede observarse, la componente principal más relevante, en azul, se desplaza, alejándose de la línea que mejor se ajusta a la distribución de los datos no atípicos.



**Figura 3.27:** Autovectores de la matriz de covarianza del conjunto de datos de ejemplo en el que se ha incluido el dato atípico no perteneciente a la misma clase del resto de observaciones. En azul, la dirección marcada por el autovector asociado al mayor autovalor.

Ante los problemas que plantea la presencia de estos datos atípicos en el entrenamiento de una BCI al extraer las características con ACP, se propone en este trabajo la utilización de técnicas que robustezcan la obtención de las componentes principales tratando de acotar un subconjunto de datos de entrenamiento libres, en la medida de lo posible, de dichos elementos atípicos. El algoritmo final, que se denominará análisis robusto de

componentes principales o ARCP, hace uso de herramientas matemáticas que permiten mejorar la extracción de las componentes principales.

Una primera aproximación a este problema, como se describe en [HS02] y [HRVB05], es robustecer la matriz de covarianza antes de calcular las componentes principales, haciendo uso del estimador de covarianza con determinante mínimo (*MCD* o *Minimum Covariance Determinant* en la literatura inglesa y descrito con más detalle en [Rou84]). Este algoritmo toma como punto de partida la media y la matriz de covarianza de aquellas  $h$  observaciones, entre las  $n$  registradas, cuya matriz de covarianza tenga un determinante mínimo. La limitación de este método está en la determinación del valor de  $h$ , que típicamente oscila entre  $0,75n$  y  $0,5n$  y que ha de ser mayor que el número de variables estudiadas,  $m$ .

Una segunda aproximación también descrita en [HS02] y [HRVB05] es la aplicación de técnicas de búsqueda de proyecciones (*PP* o *Projection Pursuit* en la literatura inglesa y estudiadas con más detalle en [CRG96]). En este caso se buscan las direcciones en las que las proyecciones de las observaciones realizadas presentan una escala más robusta.

Para los experimentos llevados a cabo en este trabajo se ha elegido el algoritmo desarrollado en [HRVB05] y denominado ROBPCA para estudiar los efectos del análisis robusto de componentes principales sobre las señales electroencefalográficas. Este algoritmo se basa en una combinación de las dos aproximaciones citadas anteriormente y propone tres etapas para la extracción de las componentes principales. Partiendo de la matriz de datos  $\mathbf{X}_{n \times m}$  ya descrita previamente, se aplica un algoritmo de preprocesamiento para llevar los datos a un subespacio de dimensión máxima  $n - 1$ . En segundo lugar, se construye una matriz de covarianza preliminar a partir de la cual se elige un número de componentes  $k$  que darán lugar a un subespacio de igual dimensión que se ajuste correctamente a la distribución de los datos, eliminando los datos atípicos. Los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza robusta de los datos proyectados en el citado subespacio de dimensión  $k$  serán las componentes principales robustas.

Estas componentes dan lugar a la matriz de características análoga a la descrita en la ecuación 3.74 y que queda expresada según la ecuación 3.87.

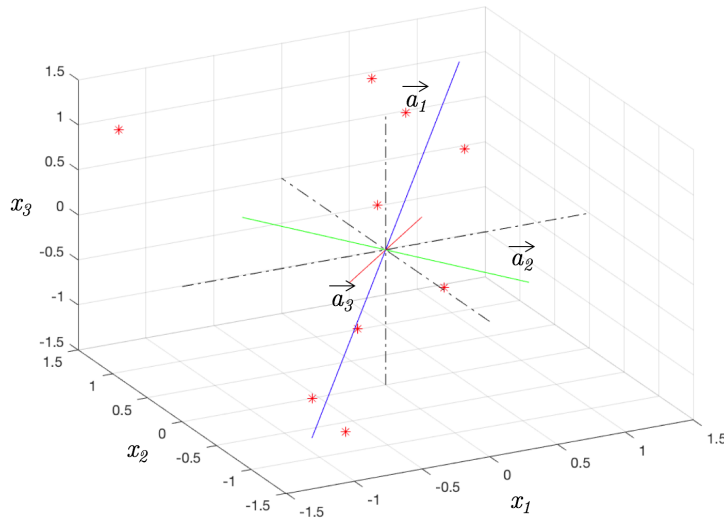
$$\mathbf{F}_{rob} = \left( \vec{v}_1, \vec{v}_2 \quad \dots \quad \vec{v}_r \right)_{k \times r} \quad (3.87)$$

En la figura 3.28, se muestran los resultados de aplicar este algoritmo al conjunto de datos utilizado en el ejemplo ilustrativo anterior, contaminados con el dato atípico. Comparando la componente principal con la obtenida en la figura 3.27, puede comprobarse que el algoritmo ROBPCA recupera como componente más relevante, destacada en azul, aquella que mejor se ajusta a la distribución de los datos no atípicos.

Cabe plantear algunos detalles interesantes de este método y otros similares en cuanto a la relación entre el número de datos atípicos introducidos y la degradación de su robustez. Para una descripción más detallada del tema, que excede el ámbito de este trabajo de



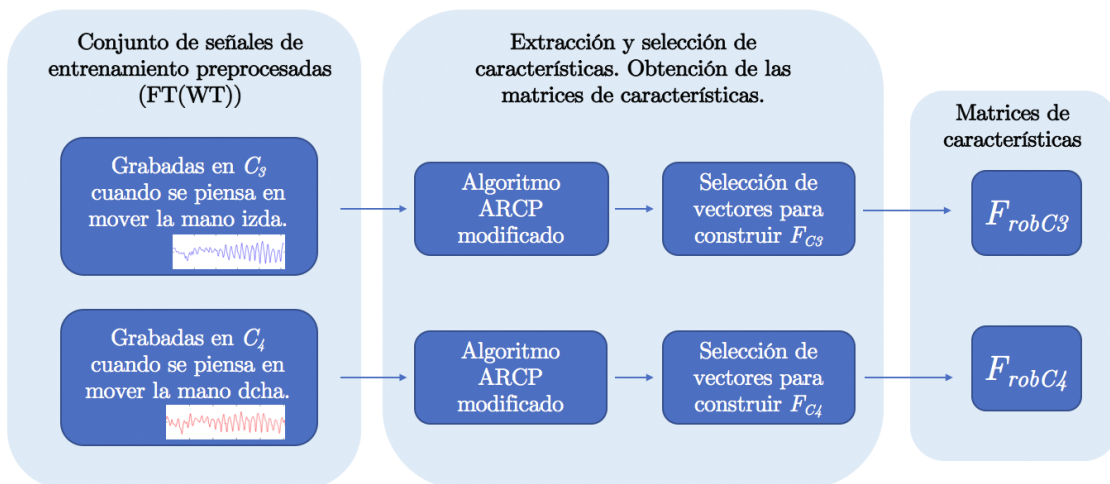
investigación, puede consultarse una profunda discusión al respecto en [HRS08].



**Figura 3.28:** Autovectores de la matriz de covarianza del conjunto de datos, incluido el dato atípico, calculados con el algoritmo ARCP. En azul, la dirección marcada por el autovector asociado al mayor autovalor.

### 3.3.3.1. Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante ARCP

La utilización de técnicas robustas para la selección de las componentes principales, no supone ninguna modificación en el esquema de la arquitectura básica de aplicación de esta metodología para el análisis de señales EEG, tal y como se muestra en la figura 3.29. Por esta razón, la arquitectura propuesta para la extracción de características mediante ARCP es idéntica a la descrita en el apartado 3.3.2.



**Figura 3.29:** Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante ARCP.



### 3.4. Mínimos cuadrados parciales

La regresión por mínimos cuadrados parciales (*partial least squares* o *PLS* en inglés), en adelante referida por sus siglas MCP, es una técnica que combina las características del análisis de componentes principales y la regresión múltiple.

Según la literatura disponible (consúltense por ejemplo [WRWI84], [GK86] o [Abd03]), este método está diseñado para facilitar el análisis en problemas donde la multicolinealidad de los datos es alta y se pretende predecir un conjunto de variables dependientes a partir de un grupo pequeño de observaciones de un gran número de variables independientes.

Originado como método de análisis de datos en disciplinas relacionadas con las ciencias sociales ([Wol66]), ha evolucionado considerablemente al utilizarse dentro de la disciplina química denominada quimiometría (véanse [Hel01] y [IMT07]). Existen, igualmente, otras aplicaciones centradas en la clasificación de tumores a partir de información genética, [DD02], o el análisis de imágenes médicas, [Wor97].

#### 3.4.1. Conceptos previos

El objetivo final de MCP no es otro que, como ya se ha resaltado, predecir, una o varias variables dependientes  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  a partir de un conjunto de variables independientes o predictoras observables  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . Sin embargo, en contraposición con ACP, por ejemplo, el enfoque de MCP pretende descubrir la estructura común que subyace en  $X_i$  e  $Y_j$ .

En comparación con ACP, allí donde este análisis estudia la matriz de datos de entrada  $\mathbf{X}$ , es decir, de variables independientes registradas, para encontrar sus componentes principales y, por tanto, la estructura de la información contenida en dichas variables, MCP pretende encontrar las componentes que siendo relevantes en la estructura de  $\mathbf{X}$  lo son también en  $\mathbf{Y}$ . Resumiendo, inicialmente, se puede decir que MCP realiza una descomposición simultánea de  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  construyendo unas componentes, denominadas en este caso **variables latentes**, que explican en la medida de lo posible la covarianza entre ambas matrices de datos.

Formalizando los conceptos matemáticos que soportan esta técnica, se parte, al igual que en ACP, de las variables citadas  $X_1, X_2, \dots, X_m$  de las que  $n$  observaciones o registros quedan reflejados en las filas de la matriz de datos de entrada que se ha denotado como  $\mathbf{X}_{n \times m}$ . En este caso, además, el algoritmo emplea los registros de la o las variables dependientes para cada una de las observaciones mencionadas,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ . La descripción posterior se particulariza para el caso en el que  $p = 1$  por ser el de interés para su aplicación en el diseño de una BCI como la propuesta en este trabajo y que en la literatura recibe el nombre de algoritmo *PLS1*. De esta forma, las observaciones de la variable  $Y$  se denotarán por el vector  $\vec{y}$  de dimensión  $n$ . En este trabajo, como se justificará más tarde en el apartado 4.2.3 dedicado a la clasificación de las señales,  $\vec{y}$  no es una variable

dependiente observada, sino un vector sintetizado a partir de la clase a la que pertenece cada observación de la matriz  $\mathbf{X}$ .

La construcción del modelo MCP se basó inicialmente en las propiedades del algoritmo *NIPALS* descrito en [Wol66]. Son muchas las aportaciones que se han hecho posteriormente desde distintos ámbitos y puntos de vista para tratar de extraer sus características y aspectos técnicos más relevantes como demuestran [Abd03], [Gar94], [GK86] o las distintas publicaciones de Inge S. Helland al respecto ([Hel88], [Hel90], [Hel92] o [Hel01]). En la descripción que se realiza a continuación se ha pretendido aunar aquellos conceptos comunes y particulares más relevantes de muchas de estas referencias.

La idea inicial, [Hel88] y [WSE01], es poder descomponer  $\mathbf{X}$  e  $\vec{y}$  según las ecuaciones 3.88 y 3.89:

$$\mathbf{X}_{n \times m} = \vec{t}_1 \vec{a}_1^T + \vec{t}_2 \vec{a}_2^T + \cdots + \vec{t}_C \vec{a}_C^T + \mathbf{E}_C \quad (3.88)$$

$$\vec{y} = \vec{t}_1 q_1 + \vec{t}_2 q_2 + \cdots + \vec{t}_C q_C + \vec{f}_C \quad (3.89)$$

donde los resultados, denominados así por analogía con la teoría de ACP,  $\vec{t}_i$ , son vectores de dimensión  $n$  que constituirán las componentes o variables latentes (*latent variables* en la literatura inglesa),  $\vec{a}_i$  son vectores de dimensión  $m$  denominados cargas en la descomposición de  $\mathbf{X}$ ,  $q_i$  son las cargas, escalares en este caso, de las variables latentes en la descomposición de la variable dependiente y  $\mathbf{E}_A$  y  $\vec{f}_A$  son las matrices residuo de ambas descomposiciones.

El cálculo de las variables latentes o resultados y de las cargas se realiza secuencialmente, tratando de que los primeros parámetros,  $\vec{t}_1$ ,  $\vec{a}_1$  y  $q_1$ , sean aquellos que contengan más información (al igual que se hacía en ACP). El vector  $\vec{t}_1$ , primera componente latente, se construye, también de forma análoga a ACP, como combinación lineal de las columnas de  $\mathbf{X}$  tal y como muestra la ecuación 3.90 ([WSE01]).

$$\vec{t}_1 = \sum_{i=1}^m \vec{x}_i w_{i1} = \mathbf{X} \vec{w}_1 \quad (3.90)$$

donde  $\vec{x}_i$  son las columnas de la matriz de datos, en otras palabras, las observaciones de cada una de las variables  $X_i$ , y  $\vec{w}_1$  es un vector de pesos de dimensión  $m$  que pondera la aportación de cada variable.

La elección del vector de pesos abre diversas alternativas como se refleja en [Gar94]. Sin embargo, con el objetivo de que  $\vec{t}_1$  e  $\vec{y}$  estén fuertemente correladas, se utilizan pesos proporcionales a la covarianza de  $\vec{x}_i$  e  $\vec{y}$ , como muestra la ecuación 3.91 (justificado en detalle en [Hel88], [Hel90] y, de nuevo, en [Gar94]).

$$w_{i1} = \vec{x}_i^T \vec{y} \Rightarrow \vec{w}_1 = \mathbf{X}^T \vec{y} \quad (3.91)$$

Justificados los cálculos de estos pesos y planteada la ecuación 3.90 que genera la primera variable latente, aún quedan por determinar las cargas  $\vec{a}_1$  y  $\vec{q}_1$  para poder avanzar en el desarrollo del algoritmo. Para ello, renombrando  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{X}$  y  $\vec{f}_0 = \vec{y}$ , se puede, en función de las descomposiciones reflejadas en 3.88 y 3.89, plantear las ecuaciones de 3.92.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= \vec{t}_1 \vec{a}_1^T + \mathbf{E}_1 \\ \vec{f}_0 &= \vec{t}_1 q_1 + \vec{f}_1\end{aligned}\tag{3.92}$$

El objetivo de la primera componente es predecir de la mejor manera posible  $\vec{y}$ , al tiempo que sintetiza la información de  $\mathbf{X}$ , reduciendo los respectivos residuos. El cálculo de las cargas que mejor satisface estos requisitos viene dado por los coeficientes de regresión mostrados en 3.93.

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \frac{\mathbf{E}_0^T \vec{t}_1}{\vec{t}_1^T \vec{t}_1} \\ q_1 &= \frac{\vec{f}_0^T \vec{t}_1}{\vec{t}_1^T \vec{t}_1}\end{aligned}\tag{3.93}$$

De esta forma se ha obtenido una variable latente,  $\vec{t}_1$ , como media ponderada de las variables predictoras,  $X_i$ , que se prueba es a su vez buena predictora de  $\vec{y}$ . Sin embargo, no toda la información potencialmente contenida en  $X_i$ , ni la variabilidad de  $\vec{y}$ , están representadas en  $\vec{t}_1$  dado que, en cualquier caso real, los residuos  $\mathbf{E}_1$  y  $\vec{f}_1$  obtenidos mediante 3.94 serán no nulos.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_0 - \vec{t}_1 \vec{a}_1^T \\ \vec{f}_1 &= \vec{f}_0 - \vec{t}_1 q_1\end{aligned}\tag{3.94}$$

Para seguir extrayendo la información relevante de las estructuras de datos originales, el algoritmo repite los pasos explicados sobre los residuos de la regresión de  $X_i$  e  $\vec{y}$  sobre  $\vec{t}_1$ , es decir, con  $\mathbf{E}_1$  e  $\vec{f}_1$  como punto de partida. A partir de ellos se obtiene la segunda variable latente,  $\vec{t}_2$ , con sus pesos y cargas correspondientes. En 3.95 se resumen los pasos a seguir en una iteración genérica  $i$  para el cálculo de la variable latente  $\vec{t}_i$ .

$$\begin{aligned}
\vec{w}_i &= \mathbf{E}_{i-1}^T \vec{f}_{i-1} \\
\vec{t}_i &= \mathbf{E}_{i-1} \vec{w}_i \\
\vec{a}_i &= \frac{\mathbf{E}_{i-1}^T \vec{t}_i}{\vec{t}_i^T \vec{t}_i} \\
q_1 &= \frac{\vec{f}_{i-1}^T \vec{t}_i}{\vec{t}_i^T \vec{t}_i}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Es posible, según se justifica en [Hel90], a partir de la incorrelación de cada residuo  $\mathbf{E}_i$  y la variable latente correspondiente  $t_i$  y de todas las variables latentes entre sí, simplificar las ecuaciones de  $\vec{a}_i$  y  $q_1$  utilizando  $\mathbf{X}$  e  $\vec{y}$ , en lugar de  $\mathbf{E}_{i-1}$  y  $\vec{f}_{i-1}$ .

Finalmente, es necesario revisar la literatura para determinar el número óptimo de componentes latentes (parámetro  $C$  en las ecuaciones 3.88 y 3.89) en el que detener el análisis. Aunque el problema es complejo y se proponen diversas variantes sin una opción idónea clara, parecen destacar algunas alternativas predominantes: bien mediante un proceso de validación cruzada ([Gar94]), bien estudiando la norma del residuo  $\vec{f}_i$  y deteniendo el algoritmo cuando decrezca con una pendiente mínima ([GK86]) o bien utilizando la suma de cuadrados de los residuos para estimar la proporción de la varianza de  $\mathbf{X}$  e  $\vec{y}$  explicada por cada variable latente ([Abd03]).

Algunos detalles del algoritmo se han obviado en aras de una mayor brevedad y por exceder los objetivos del presente trabajo. Se citan algunos a continuación de forma resumida y con la literatura disponible para su consulta.

En primer lugar, cabe la posibilidad de imponer inicialmente en el desarrollo del algoritmo ortogonalidad entre las variables latentes, entre las cargas o en ambos casos, con el fin de alcanzar un mayor grado de unicidad en la solución. En [Hel88] se demuestra detalladamente que las dos primeras opciones llevan a un resultado equivalente mientras que la última es excesivamente restrictiva. El algoritmo original, el aquí descrito, es computacionalmente más sencillo y parte de imponer la ortogonalidad en el conjunto de variables latentes.

En segundo lugar, las distintas versiones del método *PLS1* desgranadas en la literatura ya citada utilizan multitud de variantes en cuanto a la normalización de los distintos parámetros ( $\vec{w}_i^T \vec{w}_i = 1, \dots$ ). No siendo imprescindibles, también han sido descartadas por los motivos justificados anteriormente.

Para completar esta visión general del análisis de mínimos cuadrados parciales es obligatorio hacer referencia finalmente a la evolución que ha sufrido el algoritmo, al describirse y estudiarse desde una perspectiva más esencialmente estadística. El algoritmo fue motivado en sus inicios de manera heurística, como demuestran los artículos basados en *NIPALS*,

lo que provocó que sus propiedades estadísticas permanecieran desconocidas por mucho tiempo. Estas propiedades han sido estudiadas posteriormente, demostrando interesantes alternativas para el cálculo de los pesos  $\vec{w}_i$  que se citan a continuación por su interés en el diseño de la arquitectura.

A partir de [Hel90] se demuestra, por ejemplo, que el cálculo de los pesos puede llevarse a cabo mediante la ecuación 3.96.

$$\vec{w}_{i+1} = \sigma - \Sigma \mathbf{W}_i (\mathbf{W}_i^T \Sigma \mathbf{W}_i)^{-1} \mathbf{W}_i^T \sigma \quad (3.96)$$

donde:

$$\mathbf{W}_i = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_i) \quad (3.97)$$

siendo el valor de  $\Sigma$  y  $\sigma$  el mostrado en 3.58.

Este mismo cálculo puede realizarse mediante el estudio de la estructura de autovectores y autovalores de la matriz  $\mathbf{X}^T \vec{y} \vec{y}^T \mathbf{X}$ , siendo  $\vec{w}_i$  los autovectores de dicha matriz ordenados según la magnitud de sus correspondientes autovalores como se demuestra en [BW03] o [LW07]. De forma análoga, pueden obtenerse también las variables latentes  $\vec{t}_i$  mediante el análisis de la estructura de autovectores y autovalores de  $\mathbf{X} \mathbf{X}^T \vec{y} \vec{y}^T$ .

Una última propuesta sobre el cálculo de los pesos puede obtenerse a partir de [BW03] donde se demuestra 3.98.

$$\vec{w}_i = \arg \max_{\substack{\vec{w}_i^T \vec{w}_i = 1 \\ \vec{w}_i^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \vec{w}_i = 0 \forall l < i}} cov^2(\mathbf{X}_{i-1} \vec{w}_i, \vec{y}) \quad (3.98)$$

A modo de conclusión, es importante resaltar que el algoritmo, independientemente de su implementación y de los detalles citados, brinda finalmente un número determinado de componentes latentes que pretenden representar de alguna forma las características comunes entre variables independientes y dependientes. Estas variables latentes permitirán posteriormente, como se estudia en el capítulo 4 llevar a cabo distintas estrategias de predicción o clasificación para la correcta interpretación de nuevos registros de las variables observadas.

#### 3.4.1.1. Ejemplo ilustrativo

Se propone a continuación un ejemplo que ilustra los conceptos anteriores sobre los mismos datos utilizados en 3.3.1.3 para poder profundizar mejor posteriormente en su aplicación a las señales electroencefalográficas.

En este caso, los datos han sido completados con una variable Y, bivalente, análogamente a como se presentará la arquitectura propuesta para la utilización del método de

mínimos cuadrados parciales en la clasificación de tareas mentales. Los datos se muestran en la tabla 3.1.

Observación	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_1$	0.69	-1.31	0.39	0.09	1.29	0.49	0.19	-0.81	-0.31	-0.71
$X_2$	0.49	-1.21	0.99	0.29	1.09	0.79	-0.31	-0.81	-0.31	-1.01
$X_3$	0.2	-0.5	0.4	0.1	0.5	0.3	-0.1	-0.3	-0.2	-0.4
$\vec{y}$	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1

**Tabla 3.1:** Valores de las observaciones registradas para el ejemplo ilustrativo empleado en 3.3.1.3 y 3.4.1.1.

Se ha elegido, para este ejemplo y para realizar la propuesta de arquitectura de extracción de características que se presentará posteriormente, la implementación del algoritmo MCP realizada por Hervé Abdi. Los motivos esenciales de esta elección son su sencillez y disponibilidad, tanto en cuestión de código como de documentación (para más información consúltase [Abd17]), si bien es cierto que existen otras posibilidades igualmente adecuadas.

La ejecución del algoritmo sobre la matriz de datos presentada ofrece como resultado las variables latentes y los pesos de dichas variables en la descomposición de  $\mathbf{X}$  e  $\vec{y}$  que se muestran en las tablas 3.2.

(a) Variables latentes.			(b) Pesos $\vec{a}$ .			(c) Pesos $q$ .		
$T_1$	$T_2$	$T_3$	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
-0.2259	0.2915	0.1531	-2.9026	0.7583	0.0124	2.6556	0.7636	0.0513
0.5084	-0.2521	-0.1222	-2.9718	-0.3879	0.1336			
-0.3236	-0.5815	-0.1323	-2.9839	-0.2741	-0.1452			
-0.0858	-0.1796	0.1332						
-0.4890	0.3006	-0.3673						
-0.2752	-0.2335	0.1862						
0.0519	0.5192	-0.0779						
0.3199	-0.1290	-0.4209						
0.1511	0.0453	0.7504						
0.3683	0.2190	-0.1024						

**Tabla 3.2:** Resultados de MCP.

Para ahondar en el ejemplo, se han extraído todas las componentes latentes posibles y se ha calculado el tanto por ciento de la varianza de  $\mathbf{X}$  e  $\vec{y}$  explicado por cada una de las variables latentes, que se muestra en la tabla 3.3. El cálculo citado se ha realizado con la suma de cuadrados de las matrices residuo según [Abd03], tal y como se ha introducido anteriormente.

Puede observarse en estos resultados cómo las variables latentes se construyen representando simultáneamente las matrices de variables independientes y dependientes. En este caso concreto destaca la relevancia de la primera componente latente sobre el resto, sugiriendo la utilización, en el proceso posterior de predicción o clasificación, de una o, quizás, dos variables latentes. Sin ninguna duda, la última de ellas quedará excluida por

Variable latente	% Varianza explicada de un t de X	% Varianza acumulada de X	% Varianza explicada de Y	% Varianza acumulada de Y
$T_1$	96.89	96.89	78.35	78.35
$T_2$	2.96	99.85	6.47	84.83
$T_3$	0.14	100	0.02	84.86

**Tabla 3.3:** Representación de la relevancia de cada uno de los vectores latentes.

el mínimo grado de información que representa.

### 3.4.2. Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante MCP

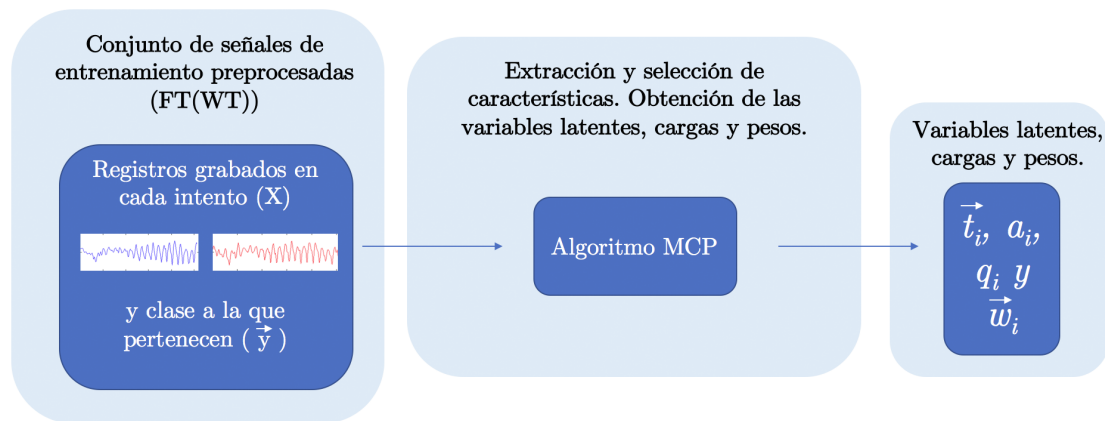
En este apartado se describe la arquitectura de extracción de características basada en MCP propuesta en este trabajo y evaluada en su desarrollo mediante una amplia batería de experimentos también documentados más adelante en esta tesis.

El objetivo final de esta arquitectura es, como ya se ha detallado, encontrar las componentes o variables latentes más significativas correspondientes a las acciones mentales utilizadas para permitir posteriormente una clasificación correcta de los registros. Como podrá comprobarse a continuación en la descripción de los bloques diseñados, la utilización de MCP simplifica considerablemente esta fase respecto a la utilización, por ejemplo, de ACP.

El primer paso en la extracción de características, como se muestra en la figura 3.30, partiendo del conjunto de señales de entrenamiento que haya sido seleccionado con anterioridad, mantiene abierta la posibilidad de introducir una fase inicial de tratamiento de dichas señales con la transformada de Fourier y la transformada wavelet, tal y como se describió al inicio de este mismo capítulo. De esta forma, es posible, de nuevo, validar la idoneidad de trabajar sobre las señales directamente o sobre los coeficientes extraídos por las distintas transformadas o por su combinación.

Una vez obtenidos estos coeficientes o trabajando en su caso directamente con las señales, se propone el encadenamiento de los dos registros tomados para cada intento, en los electrodos  $C_3$  y  $C_4$  respectivamente, antes de aplicar el algoritmo de mínimos cuadrados parciales. Este punto merece una explicación un poco más detallada por cuanto diverge respecto a lo defendido para el caso de ACP.

Como se ha explicado en profundidad en el apartado 3.3.2, en el caso de ACP, se construyen dos matrices de características independientes. Por un lado, se extraen las componentes principales de las señales grabadas cuando los sujetos piensan en mover su mano izquierda y, por otro, las componentes principales de las señales grabadas cuando los sujetos piensan en mover su mano derecha. Es decir, el algoritmo no procesa realmente la información de la clase a la que pertenecen las señales. Por esta razón, resulta crítico



**Figura 3.30:** Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante MCP.

cuidar especialmente la composición de la matriz de datos a partir de la cual se hallan las componentes principales.

En el caso de MCP, el algoritmo sí tiene en cuenta la información de la clase a la que pertenece cada registro, lo que permite hipotéticamente encadenar la información de ambos electrodos, con el objetivo de simplificar de forma apreciable la arquitectura propuesta sin sacrificar la eficacia de la extracción de características.

Tal y como muestra la figura 3.30, el algoritmo entrega finalmente como resultado de esta etapa, es decir, como características del conjunto de datos, las variables latentes,  $t_i$ , y las cargas y pesos,  $a_i$ ,  $q_i$  y  $w_i$  que serán utilizados en la fase de clasificación descrita en el próximo capítulo.

En el capítulo de resultados experimentales, 5, se evaluará el rendimiento de esta arquitectura seleccionando diferentes conjuntos de variables latentes.

### 3.4.3. Análisis robusto por mínimos cuadrados parciales

Al igual que en el caso de ACP, la sensibilidad de MCP a los datos atípicos presentes en los conjuntos de entrenamiento ha sido estudiada y comprobada en la literatura disponible. Tanto desde un punto de vista genérico ([FSMVE07] y [HRS08]), como estudiando la forma de robustecer este método en concreto ([GR98] y [HB03]) se han propuesto diversas alternativas que tienen como objetivo conseguir que las variables latentes obtenidas a partir de un determinado conjunto de entrenamiento sean invariantes a la presencia de dichos datos atípicos.

En este trabajo, dadas las características de los datos ya comentadas, también se ha considerado interesante estudiar el efecto de estas técnicas de robustecimiento sobre los resultados finales. Para ello, se ha introducido en la arquitectura de análisis el algoritmo *RSIMPLS* descrito con amplio detalle en [HB03] y disponible en [VH05], dando lugar a lo que se denominará en adelante **extracción de características por mínimos cua-**



**drados parciales robustos** o MCPR. El algoritmo incorpora, en definitiva, técnicas similares a las citadas para *ROBPCA* descritas en el apartado 3.3.3.

Aplicando este algoritmo robustecido sobre los datos del ejemplo utilizado en los apartados anteriores, a modo de ejemplo final en la descripción de MCPR, los resultados permiten identificar el elemento atípico de la matriz de observaciones y descartarlo, obteniendo unas componentes latentes mejor ajustadas a las características de los datos y que representan mejor los registros y sus clases. Los resultados completos se muestran en las tablas 3.4.

(a) Variables latentes.			(b) Pesos $\vec{a}$ .			(c) Pesos $q$ .		
$T_1$	$T_2$	$T_3$	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
-0.7705	0.2167	-0.0218	-0.6509	0.7832	-0.1770	0.7139	1.2118	11.0179
1.9187	-0.0976	-0.0015	-0.7027	-0.6184	-0.2343			
-0.9975	-0.3472	0.0132	-0.2885	-0.1784	0.9700			
-0.2182	-0.0893	-0.0169						
-1.6679	0.2478	0.0264						
-0.8883	-0.1359	-0.0185						
0.2073	0.3940	-0.0077						
1.2572	-0.0029	0.0254						
1.3664	0.2084	-0.0064						

(d) Representación de la relevancia de cada uno de los vectores latentes.				
Variable latente	% Varianza explicada de X	% Varianza acumulada % de X	% Varianza explicada % de Y	%Varianza acumulada % de Y
$T_1$	95.99	95.99	78.85	78.85
$T_2$	3.44	99.44	8.50	87.36
$T_3$	0.02	99.46	4.12	91.48

**Tabla 3.4:** Resultados de MCPR.

### 3.4.3.1. Arquitectura de extracción de características para señales EEG mediante MCPR

La arquitectura propuesta para la extracción de características de señales EEG mediante el análisis robusto de mínimos cuadrados parciales se mantiene idéntica a la propuesta para el caso de MCP, véase figura 3.30, sustituyendo la utilización del algoritmo de Hervé Abdi por *RSIMPLS*.

## 3.5. Conclusiones y aportaciones

En este capítulo se ha presentado el marco teórico fundamental de las técnicas propuestas para la extracción de características de las señales EEG.

Partiendo de técnicas de tratamiento de señal comunes como la transformada de Fourier, se ha estudiado en profundidad la transformada wavelet, su desarrollo y aportaciones en el análisis electroencefalográfico, proponiéndose una arquitectura mixta de aplicación

para mejorar su eficacia como algoritmo de preprocesado extracción y selección. La arquitectura propuesta responde a la hipótesis de que la transformada wavelet discreta aplicada sobre una señal electroencefalográfica puede filtrar el ritmo mu en los coeficientes de aproximación de segundo nivel o de detalle de tercer nivel y el ritmo beta en los coeficientes de detalle de segundo nivel, reduciendo el número de coeficientes que conforman el vector de entrada de la etapa de clasificación.

Formalizando también los conceptos teóricos esenciales, se ha presentado el algoritmo de análisis de componentes principales y su versión robustecida con el consiguiente diseño de una arquitectura completa de extracción de características modificada en función de las particularidades de una BCI.

Finalmente, se ha desarrollado un estudio en profundidad del algoritmo de mínimos cuadrados parciales, de sus propiedades y ventajas como evolución de ACP y su idoneidad para el análisis de señales electroencefalográficas, proponiéndose, como en los casos anteriores, una arquitectura de extracción de características adecuada tanto del algoritmo original como de su versión robustecida.



## Capítulo 4

# Clasificación de señales EEG

### 4.1. Introducción

Una vez se han descrito en profundidad las distintas estrategias planteadas para la etapa de extracción de características de una interfaz cerebro-ordenador, corresponde afrontar la etapa de clasificación, también denominada de traducción, encargada de decidir la clase a la que corresponden las características extraídas previamente para cada uno de los registros realizados.

En este capítulo se documenta el estudio realizado para el diseño de esta etapa y se proponen diversas arquitecturas, adaptadas a cada una de las alternativas de extracción de características ya revisadas, que se describirán con detalle en los apartados siguientes.

Inicialmente, la descripción parte de los métodos más sencillos, especialmente indicados para las técnicas más avanzadas de extracción de características como pudiera ser MCPR, por ejemplo, para terminar con el estudio de las técnicas de traducción más complejas encaminadas a implementar la clasificación de aquellas características menos procesadas.

Concretamente, estos métodos propuestos son:

- Medida de distancias entre vectores originales y recuperados mediante análisis robusto de componentes principales.
- Análisis discriminante robusto sobre ACPR.
- Regresión lineal basada en las componentes latentes obtenidas mediante el método de MCPR.
- Máquinas de soporte vectorial también a partir de los coeficientes obtenidos por la aplicación combinada de las transformadas de Fourier y wavelet.

Como se ha descrito anteriormente, estos clasificadores deberán decidir si las características extraídas de las señales corresponden a la imaginación del movimiento de la mano

izquierda o a la imaginación del movimiento de la mano derecha. En las arquitecturas propuestas denotaremos el conjunto de clases por:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} \quad (4.1)$$

siendo

$\omega_1$  la clase **imaginación del movimiento de la mano izquierda** y

$\omega_2$  la clase **imaginación del movimiento de la mano derecha**.

En todos los casos en los que el algoritmo de clasificación lo permite, se ha incluido en la arquitectura de clasificación una **clase de rechazo** ( $\omega_0$ ). Como se ha justificado anteriormente, la naturaleza compleja de las señales recogidas y de las propias tareas mentales que realizan los usuarios implican la presencia inevitable de datos atípicos. Las arquitecturas de extracción de características y también los algoritmos de clasificación se han escogido y modificado con el objetivo de evitar los efectos perjudiciales de estos datos en la etapa de entrenamiento. Sin embargo, estos datos atípicos se presentarán igualmente en tiempo real en el funcionamiento normal de la BCI. El objetivo de esta clase de rechazo es, precisamente, poder capturar y gestionar en tiempo real estas señales que, de otra forma, degradarán la calidad de la interfaz.

## 4.2. Descripción de los clasificadores propuestos

### 4.2.1. Distancias entre vectores originales y recuperados mediante análisis de componentes principales

#### 4.2.1.1. Conceptos previos

En el apartado 3.3.2 y, más detalladamente, en el ejemplo 3.3.1.3, figura 3.23, se ilustra la capacidad del algoritmo ACP como método de extracción de características. En el ejemplo citado, una vez obtenida la matriz de características a partir de un conjunto de entrenamiento en base a las componentes principales calculadas, se transforman los datos y se recuperan mediante las ecuaciones 3.75 y 3.76. Como se comprueba en la figura citada, la distancia entre un punto que no pertenece al conjunto de datos de entrenamiento y dicho punto transformado y recuperado con la matriz de características construida es mucho mayor que las distancias análogas para cualquier dato que pertenezca al conjunto de entrenamiento de esa clase o tenga características similares a estos datos.

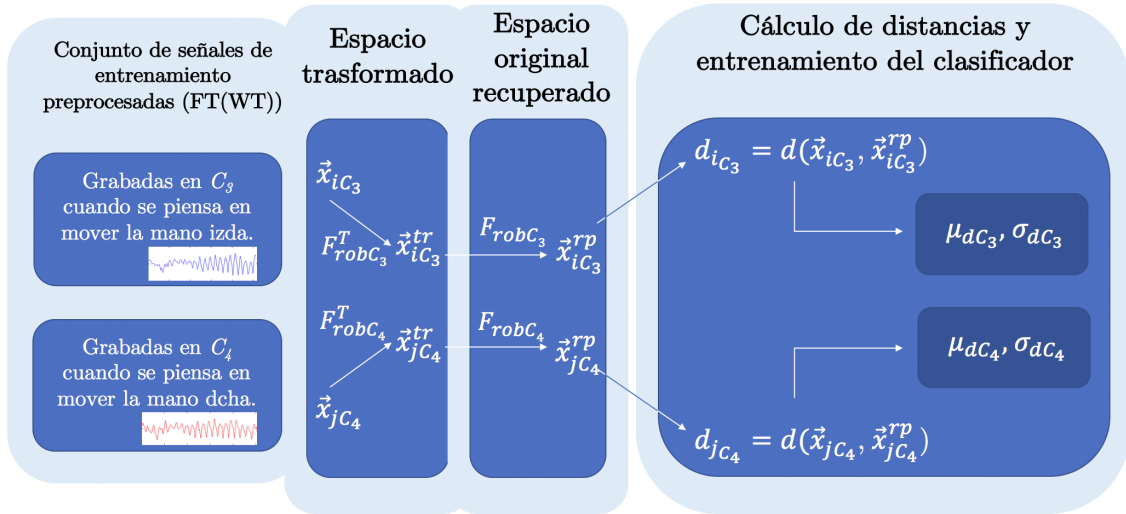
#### 4.2.1.2. Arquitectura de clasificación basada en la medida de distancias entre vectores originales y recuperados mediante análisis de componentes principales

Al final de la etapa de extracción de características (véase apartado 3.3.2), la arquitectura propuesta basada en el análisis de componentes principales obtiene dos matrices.

Una de ellas está especializada en el movimiento imaginado de la extremidad izquierda, que se ha denominado  $\mathbf{F}_{C_3}$  o  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_3}$ , y la otra está especializada en el movimiento de la mano derecha  $\mathbf{F}_{C_4}$  o  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_4}$ . Las figuras 3.26 y 3.29, mostradas anteriormente, resumen gráficamente estas arquitecturas. Dado que, en todas las pruebas previas realizadas, la arquitectura no robusta mostró un rendimiento muy bajo, la arquitectura de clasificación descrita y propuesta en este apartado se referirá únicamente al algoritmo ARCP.

La primera matriz, que se genera a partir de las señales grabadas en el electrodo  $C_3$  cuando el sujeto imagina el movimiento de su mano izquierda, presenta hipotéticamente un patrón más claro al imaginar dicho movimiento, mientras que la segunda matriz, que proviene de las grabaciones obtenidas en el electrodo  $C_4$  cuando el sujeto imagina el movimiento de su mano derecha, lo hace para este movimiento.

La arquitectura propuesta para la clasificación de las señales electroencefalográficas utilizando el análisis robusto de componentes principales como método de extracción de características, cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 4.1 para la fase de entrenamiento, se basa en el diseño de dos clasificadores independientes que analicen individualmente las señales recogidas en los electrodos  $C_3$  y  $C_4$  en los espacios transformados por  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_3}$  y  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_4}$  respectivamente y fusionen colaborativamente sus resultados.



**Figura 4.1:** Arquitectura de clasificación basada en la medida de distancias entre vectores originales y recuperados mediante análisis de componentes principales. Fase de entrenamiento de los clasificadores.

En la fase de entrenamiento, una vez obtenidas las matrices de componentes principales  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_3}$  y  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_4}$  tal y como se ha descrito previamente en el apartado 3.3.3, los datos de entrenamiento se transforman mediante las ecuaciones 4.2:

$$\begin{aligned}\vec{x}_{iC_3}^{tr} &= \mathbf{F}_{\text{rob}C_3}^T \cdot \vec{x}_{iC_3} \\ \vec{x}_{jC_4}^{tr} &= \mathbf{F}_{\text{rob}C_4}^T \cdot \vec{x}_{jC_4}\end{aligned}\tag{4.2}$$

siendo:

- $\vec{x}_{iC_3}$  las señales registradas en el electrodo  $C_3$  para los intentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda, eliminado del conjunto de entrenamiento los datos que han sido catalogados como datos atípicos por el algoritmo ACP robusto.
- $\vec{x}_{jC_4}$  las señales registradas en el electrodo  $C_4$  para los intentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano derecha, eliminado también del conjunto de entrenamiento los datos que han sido catalogados como datos atípicos por el algoritmo ACP robusto.
- $\vec{x}_{iC_3}^{tr}$  y  $\vec{x}_{jC_4}^{tr}$  los correspondientes vectores transformados.

A continuación, se recuperan los vectores en el espacio original mediante las ecuaciones 4.3:

$$\begin{aligned}\vec{x}_{iC_3}^{rp} &= \mathbf{F}_{\text{rob}C_3} \cdot \vec{x}_{iC_3}^{tr} \\ \vec{x}_{jC_4}^{rp} &= \mathbf{F}_{\text{rob}C_4} \cdot \vec{x}_{jC_4}^{tr}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Y se calculan las distancias entre vectores recuperados y originales de acuerdo a 4.4:

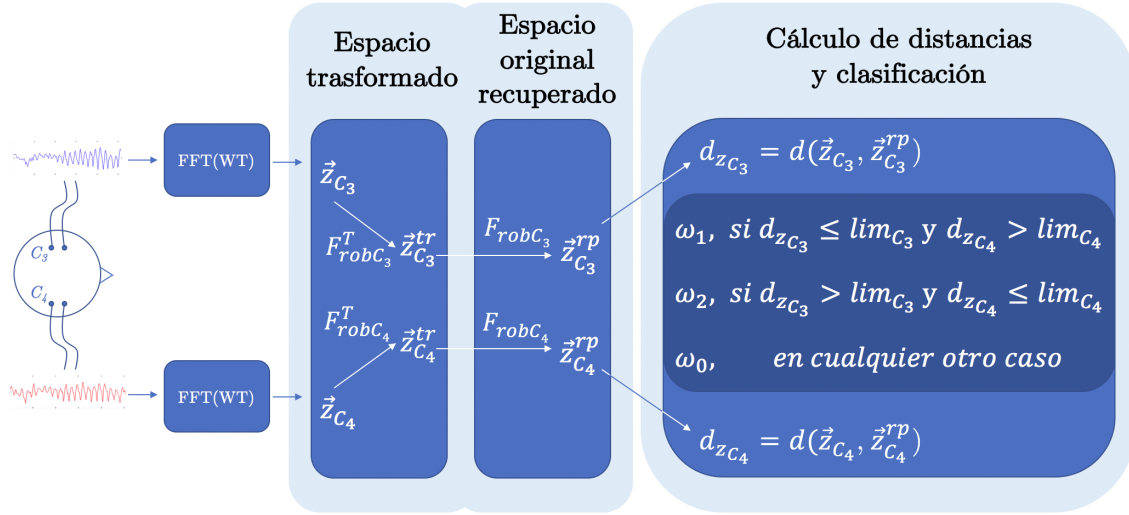
$$\begin{aligned}d_{iC_3} &= d(\vec{x}_{iC_3}, \vec{x}_{iC_3}^{rp}) \\ d_{jC_4} &= d(\vec{x}_{jC_4}, \vec{x}_{jC_4}^{rp})\end{aligned}\tag{4.4}$$

Con estas distancias, se construye dos clasificadores calculando la media y la desviación estándar de ambos conjuntos, 4.5:

$$\begin{aligned}\mu_{dC_3} &= \frac{1}{n_{C_3}} \sum_{i=1}^{n_{C_3}} d_{iC_3} \\ \sigma_{dC_3} &= \sqrt{\frac{1}{n_{C_3}} \sum_{i=1}^{n_{C_3}} (d_{iC_3} - \mu_{dC_3})^2} \\ \mu_{dC_4} &= \frac{1}{n_{C_4}} \sum_{i=1}^{n_{C_4}} d_{iC_4} \\ \sigma_{dC_4} &= \sqrt{\frac{1}{n_{C_4}} \sum_{i=1}^{n_{C_4}} (d_{iC_4} - \mu_{dC_4})^2}\end{aligned}\tag{4.5}$$

siendo  $n_{C_3}$  y  $n_{C_4}$  el número de vectores de entrenamiento etiquetados como datos no atípicos por el algoritmo ACP robusto.

Obtenidos estos parámetros, quedan diseñados dos clasificadores, especializados cada uno de ellos en una tarea mental, para las características extraídas de los datos de cada uno de los hemisferios cerebrales.



**Figura 4.2:** Arquitectura de clasificación basada en la medida de distancias entre vectores originales y recuperados mediante análisis de componentes principales. Clasificación de una nueva observación.

Ante una nueva observación  $\vec{z}$ , la arquitectura propuesta, mostrada en la figura 4.2, procederá de la siguiente forma:

- En primer lugar, tras el preprocesamiento elegido (transformada de Fourier, wavelet o combinación de ambas), las señales obtenidas para esta nueva observación en los electrodos  $C_3$  ( $\vec{z}_{C_3}$ ) y  $C_4$  ( $\vec{z}_{C_4}$ ) se llevan al espacio transformado mediante las matrices  $\mathbf{F}_{robC_3}$  y  $\mathbf{F}_{robC_4}$  respectivamente, según 4.6:

$$\begin{aligned}\vec{z}_{C_3}^{tr} &= \mathbf{F}_{robC_3}^T \cdot \vec{z}_{C_3} \\ \vec{z}_{C_4}^{tr} &= \mathbf{F}_{robC_4}^T \cdot \vec{z}_{C_4}\end{aligned}\tag{4.6}$$

- Sobre cada uno de estos vectores transformados se aplica la transformación contraria para devolver los datos al espacio original, según 4.7:

$$\begin{aligned}\vec{z}_{C_3}^{rp} &= \mathbf{F}_{robC_3} \cdot \vec{z}_{C_3}^{tr} \\ \vec{z}_{C_4}^{rp} &= \mathbf{F}_{robC_4} \cdot \vec{z}_{C_4}^{tr}\end{aligned}\tag{4.7}$$

- Y se calculan las distancias correspondientes mediante 4.8:

$$\begin{aligned}d_{z_{C_3}} &= d(\vec{z}_{C_3}, \vec{z}_{C_3}^{rp}) \\ d_{z_{C_4}} &= d(\vec{z}_{C_4}, \vec{z}_{C_4}^{rp})\end{aligned}\tag{4.8}$$

- Finalmente, la fusión de ambos clasificadores sigue el siguiente criterio:



$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } d_{zC_3} \leq \mu_{dC_3} + 6 \cdot \sigma_{dC_3} \text{ y } d_{zC_4} > \mu_{dC_4} + 6 \cdot \sigma_{dC_4} \\ \omega_2, & \text{si } d_{zC_3} > \mu_{dC_3} + 6 \cdot \sigma_{dC_3} \text{ y } d_{zC_4} \leq \mu_{dC_4} + 6 \cdot \sigma_{dC_4} \\ \omega_0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (4.9)$$

Es decir, la señal será clasificada como tarea mental **imaginar el movimiento de la mano izquierda** si la distancia entre el vector original y el recuperado para la componente grabada en el electrodo  $C_3$  tiene una magnitud cercana a la media de las distancias de los vectores de entrenamiento de esta tarea mental y la distancia entre vector original y recuperado para la componente grabada en el electrodo  $C_4$  queda lejos de la media de las distancias de los vectores de entrenamiento de la tarea mental contraria. De manera análoga, la señal será clasificada como tarea mental **imaginar el movimiento de la mano derecha** si la distancia entre vector original y recuperado para la componente grabada en el electrodo  $C_4$  tiene una magnitud cercana a la media de las distancias de los vectores de entrenamiento de esta tarea mental y la distancia entre vector original y recuperado para la componente grabada en el electrodo  $C_3$  queda lejos de la media de las distancias de los vectores de entrenamiento de la clase contraria. En cualquier otro caso, la señal quedará catalogada dentro de la clase de rechazo.

#### 4.2.2. Análisis discriminante robusto

##### 4.2.2.1. Conceptos previos

Este análisis, descrito ampliamente en [HVD04] y disponible, como el resto de técnicas de robustecimiento empleadas en este trabajo, en [VH05], parte del esquema clásico de un clasificador estadístico bajo la hipótesis de distribuciones gaussianas basado en las funciones discriminantes de la ecuación 4.10:

$$g_j^Q(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \ln|\Sigma_j| - \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu}_j)^T \Sigma_j^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}_j) + \ln(\pi_j) \quad (4.10)$$

donde:

- $\vec{\mu}_j$  es el vector medio de la clase  $\omega_j$ ,
- $\Sigma_j$  es la matriz de covarianza de dicha clase,
- $\pi_j$  es su probabilidad a priori.

En este esquema clásico, calculado el valor de estas funciones discriminantes para todas las clases, la clase asignada a la observación  $\vec{x}$  será  $\omega_k$  si:

$$g_k^Q(\vec{x}) > g_j^Q(\vec{x}) \forall j = 1, \dots, l, j \neq k \quad (4.11)$$

En la práctica, como es el caso que se describe, estos parámetros  $\vec{\mu}_j$ ,  $\Sigma_j$  y  $\pi_j$  no son conocidos y suelen sustituirse por  $\bar{\vec{x}}_j$ ,  $S_j$  y  $\hat{\pi}_j$ , vector media del conjunto de entrenamiento, matriz de covarianza y frecuencia relativa obtenidos a partir de las muestras de entrenamiento. De nuevo, por tanto, la aplicación del análisis clásico resultará muy sensible a la presencia de datos atípicos en el conjunto de los datos de entrenamiento.

Para robustecer este esquema clásico, [HVD04] propone utilizar de nuevo el estimador de covarianza con determinante mínimo citado en el apartado 3.3.3. El algoritmo parte del cálculo de la media  $\hat{\vec{\mu}}_{j,0}$  y la matriz de covarianza  $S_{j,0}$  de las  $h_j$  observaciones de la clase  $\omega_j$  cuya matriz de covarianza tiene determinante mínimo. A partir de estas estimaciones, se calculan las distancias robustas preliminares para cada observación de la clase correspondiente mediante la ecuación 4.12:

$$RD_{ij}^0 = \sqrt{(\vec{x}_{ij} - \hat{\vec{\mu}}_{j,0})^T \hat{S}_{j,0}^{-1} (\vec{x}_{ij} - \hat{\vec{\mu}}_{j,0})} \quad (4.12)$$

siendo  $\vec{x}_{ij}$  la observación  $i$  de la clase  $\omega_j$ .

Esta distancia permite hacer una primera estimación de cuáles son las observaciones que pueden clasificarse como datos atípicos, considerando como tales aquellas cuya distancia es superior al límite fijado en la ecuación 4.13:

$$RD_{ij}^0 \geq \sqrt{\chi_{p,0,975}^2} \quad (4.13)$$

Descartando los datos considerados atípicos mediante el cálculo de esta distancia, el algoritmo obtiene de nuevo la media  $\hat{\vec{\mu}}_{j,MCD}$  y la matriz de covarianza  $\hat{S}_{j,MCD}$  con el resto de las observaciones, y permite calcular de nuevo las distancias robustas finales mediante la ecuación 4.14:

$$RD_{ij} = \sqrt{(\vec{x}_{ij} - \hat{\vec{\mu}}_{j,MCD})^T \hat{S}_{j,MCD}^{-1} (\vec{x}_{ij} - \hat{\vec{\mu}}_{j,MCD})} \quad (4.14)$$

En función de estas distancias, se consideran definitivamente como datos atípicos aquellos que superen el límite fijado en la ecuación 4.15:

$$RD_{ij} \geq \sqrt{\chi_{p,0,975}^2} \quad (4.15)$$

Finalmente, denotando por  $\tilde{n}_j$  el número de datos no atípicos de la clase  $j$  y siendo el número de datos no atípicos totales  $\tilde{n} = \sum_{j=1}^l \tilde{n}_j$ , la ecuación 4.16 permite estimar las probabilidades de pertenencia a cada clase de manera robusta:

$$\hat{\pi}_{j,MCD} = \frac{\tilde{n}_j}{\tilde{n}} \quad (4.16)$$

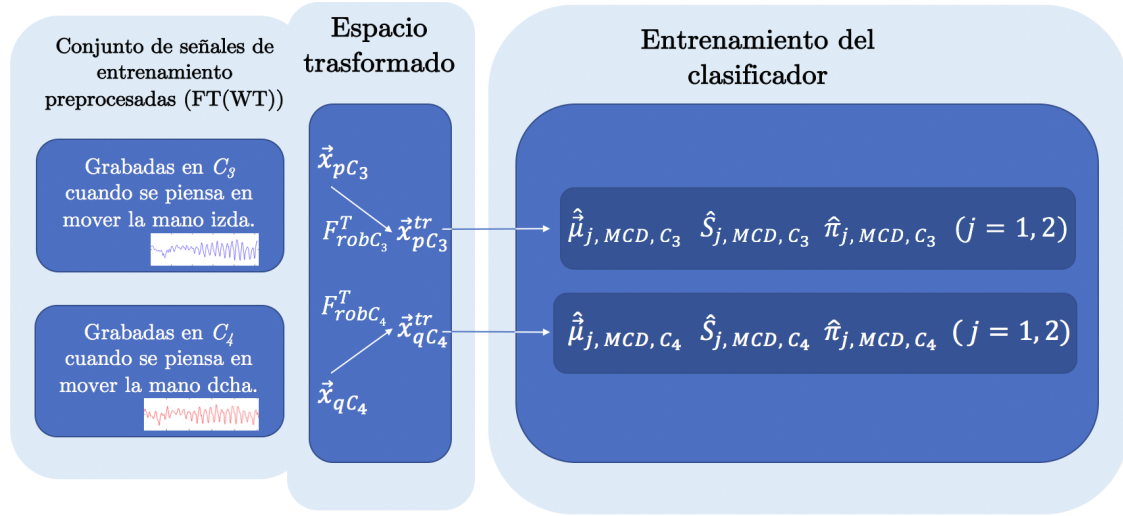
De esta manera, la clasificación mediante el discriminante cuadrático robusto asignará la clase  $k$  a la observación  $\vec{x}$  si  $\hat{g}_k^{RQ}(\vec{x}) > \hat{g}_j^{RQ}(\vec{x}) \forall j = 1, \dots, l, j \neq k$  con:

$$g_j^{RQ}(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \ln |\hat{\Sigma}_{j,MCD}| - \frac{1}{2} (\vec{x} - \hat{\mu}_{j,MCD})^T \hat{\Sigma}_{j,MCD}^{-1} (\vec{x} - \hat{\mu}_{j,MCD}) + \ln(\hat{\pi}_{j,MCD}) \quad (4.17)$$

#### 4.2.2.2. Arquitectura de clasificación basada en el análisis discriminante robusto

Como en la arquitectura propuesta anteriormente, este diseño parte de la construcción de sendas matrices,  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_3}$  y  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_4}$  especializadas en el movimiento imaginado de la mano izquierda y en el movimiento imaginado de la mano derecha, respectivamente.

La arquitectura propuesta para la clasificación de las señales electroencefalográficas utilizando el análisis robusto de componentes principales como método de extracción de características se basa, también en este caso, en el diseño de dos clasificadores independientes que analizan individualmente las señales recogidas en los electrodos  $C_3$  y  $C_4$  en los espacios transformados por  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_3}$  y  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_4}$  y fusionan sus resultados, tal y como se muestra en la figura 4.3.



**Figura 4.3:** Arquitectura de clasificación basada en el análisis discriminante robusto. Fase de entrenamiento de los clasificadores.

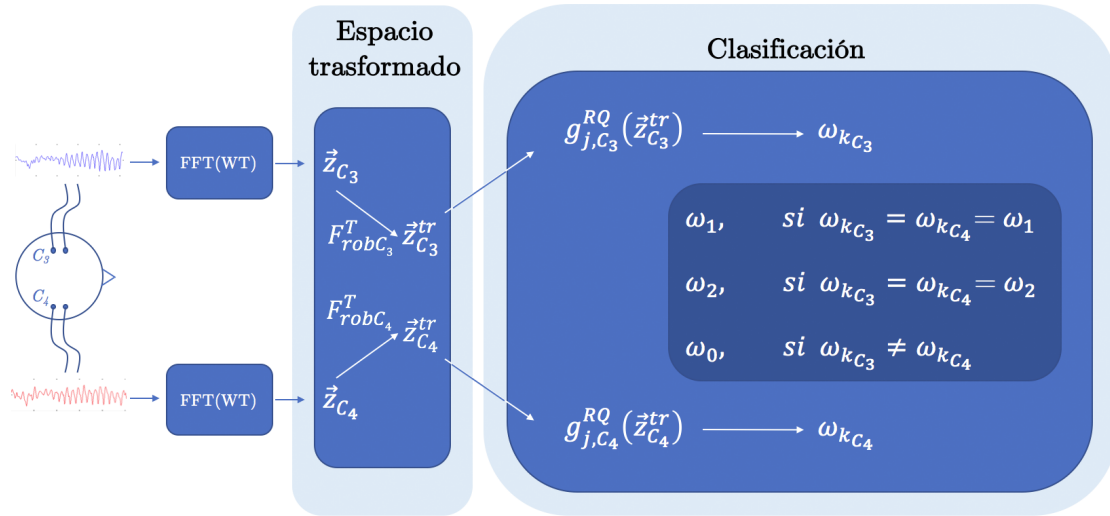
De nuevo, en la etapa de entrenamiento, una vez obtenidas las matrices de componentes principales  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_3}$  y  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_4}$ , se transforman los datos de entrenamiento mediante las ecuaciones 4.18:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{pC_3}^{tr} &= \mathbf{F}_{\text{rob}C_3}^T \cdot \vec{x}_{pC_3} \\ \vec{x}_{qC_4}^{tr} &= \mathbf{F}_{\text{rob}C_4}^T \cdot \vec{x}_{qC_4} \end{aligned} \quad (4.18)$$

siendo:

- $\vec{x}_{pC_3}$  las señales registradas en el electrodo  $C_3$  para los intentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano izquierda, eliminado del conjunto de entrenamiento los datos que han sido catalogados como datos atípicos por el algoritmo ACP robusto.
- $\vec{x}_{qC_4}$  las señales registradas en el electrodo  $C_4$  para los intentos en los que el sujeto imaginaba mover su mano derecha, eliminado también del conjunto de entrenamiento los datos que han sido catalogados como datos atípicos por el algoritmo ACP robusto.
- $\vec{x}_{pC_3}^{tr}$  y  $\vec{x}_{qC_4}^{tr}$  los correspondientes vectores transformados.

En cada espacio transformado, se propone el diseño de un clasificador mediante el cálculo robusto de los parámetros  $\hat{\mu}_{j,MCD}$ ,  $\hat{S}_{j,MCD}$  y  $\hat{\pi}_{j,MCD}$  ya explicados en este mismo apartado. La aplicación del algoritmo sobre los datos de entrenamiento grabados en  $C_3$  dará lugar a un clasificador discriminante cuyos parámetros son  $\hat{\mu}_{j,MCD,C_3}$ ,  $\hat{S}_{j,MCD,C_3}$  y  $\hat{\pi}_{j,MCD,C_3}$  mientras que los datos grabados en  $C_4$  darán lugar a  $\hat{\mu}_{j,MCD,C_4}$ ,  $\hat{S}_{j,MCD,C_4}$  y  $\hat{\pi}_{j,MCD,C_4}$ , tal y como ha quedado reflejado en la figura 4.3.



**Figura 4.4:** Arquitectura de clasificación basada en el análisis discriminante robusto. Clasificación de una nueva observación.

Obtenidos estos parámetros y diseñados los dos clasificadores para las características extraídas de los datos de cada uno de los hemisferios, la arquitectura propuesta, mostrada en la figura 4.4, procesa una nueva observación  $\vec{z}$  de la siguiente forma:

- En primer lugar, tras el preprocesamiento elegido, las señales obtenidas para esta nueva observación en los electrodos  $C_3$  ( $\vec{z}_{C_3}$ ) y  $C_4$  ( $\vec{z}_{C_4}$ ), se llevan al espacio transformado mediante las matrices  $\mathbf{F}_{robC_3}$  y  $\mathbf{F}_{robC_4}$  respectivamente, según 4.19:

$$\vec{z}_{C_3}^{tr} = \mathbf{F}_{\text{rob}C_3}^T \cdot \vec{z}_{C_3} \quad (4.19)$$

$$\vec{z}_{C_4}^{tr} = \mathbf{F}_{\text{rob}C_4}^T \cdot \vec{z}_{C_4}$$

- Sobre cada uno de estos vectores transformados se aplica el clasificador discriminante cuadrático robusto diseñado, obteniendo dos resultados que se denominarán  $\omega_{k_{C_3}}$  y  $\omega_{k_{C_4}}$ .

$\omega_{k_{C_3}}$  será la clase para la cual se cumpla  $\hat{g}_{k_{C_3},C_3}^{RQ}(\vec{z}_{C_3}^{tr}) > \hat{g}_{j,C_3}^{RQ}(\vec{z}_{C_3}^{tr}) j = 1, 2, j \neq k$ , siendo:

$$\begin{aligned} g_{j,C_3}^{RQ}(\vec{z}_{C_3}^{tr}) = & -\frac{1}{2} \ln |\hat{\Sigma}_{j,MCD,C_3}| - \\ & -\frac{1}{2} (\vec{z}_{C_3}^{tr} - \hat{\mu}_{j,MCD,C_3})^T \hat{\Sigma}_{j,MCD,C_3}^{-1} (\vec{z}_{C_3}^{tr} - \hat{\mu}_{j,MCD,C_3}) + \\ & + \ln(\hat{\pi}_{j,MCD,C_3}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$\omega_{k_{C_4}}$  será la clase para la cual se cumpla  $\hat{g}_{k_{C_4},C_4}^{RQ}(\vec{z}_{C_4}^{tr}) > \hat{g}_{j,C_4}^{RQ}(\vec{z}_{C_4}^{tr}) j = 1, 2, j \neq k$ , siendo:

$$\begin{aligned} g_{j,C_4}^{RQ}(\vec{z}_{C_4}^{tr}) = & -\frac{1}{2} \ln |\hat{\Sigma}_{j,MCD,C_4}| - \\ & -\frac{1}{2} (\vec{z}_{C_4}^{tr} - \hat{\mu}_{j,MCD,C_4})^T \hat{\Sigma}_{j,MCD,C_4}^{-1} (\vec{z}_{C_4}^{tr} - \hat{\mu}_{j,MCD,C_4}) + \\ & + \ln(\hat{\pi}_{j,MCD,C_4}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

- Finalmente, la fusión de ambos clasificadores sigue el siguiente criterio:

$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } \omega_{k_{C_3}} = \omega_{k_{C_4}} = \omega_1, \\ \omega_2, & \text{si } \omega_{k_{C_3}} = \omega_{k_{C_4}} = \omega_2, \\ \omega_0, & \text{si } \omega_{k_{C_3}} \neq \omega_{k_{C_4}} \end{cases} \quad (4.22)$$

### 4.2.3. Regresión lineal basada en las componentes latentes obtenidas mediante el método de MCP

#### 4.2.3.1. Conceptos previos

Si bien MCP no fue desarrollado como un algoritmo de clasificación, la literatura disponible pone de manifiesto, tal y como se describe ampliamente en [BW03], que esta técnica permite obtener resultados muy satisfactorios en tareas de discriminación en problemas donde, además, es necesaria una reducción de la dimensionalidad de los datos observados.

Partiendo de estos estudios y del modelo de regresión basado en mínimos cuadrados parciales que se describe a continuación, se propondrá una arquitectura de clasificación para las señales electroencefalográficas tratadas en este trabajo.

La extracción de características basada en mínimos cuadrados parciales descrita en el apartado 3.4 y esquematizada en la figura 3.30, realiza una descomposición simultánea de la matriz de observaciones y de la variable dependiente,  $\mathbf{X}$  e  $\vec{y}$  respectivamente, mediante el cálculo de unas nuevas variables denominadas variables latentes,  $\vec{t}_i$ , que permiten estimar  $\vec{y}$  y modelar  $\mathbf{X}$  de acuerdo a las ecuaciones 4.23 y 4.25 que se reproducen a continuación en forma matricial y particularizadas para cada componente de las matrices correspondientes.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{n \times m} &= \vec{t}_1 \vec{a}_1^T + \vec{t}_2 \vec{a}_2^T + \cdots + \vec{t}_C \vec{a}_C^T + \mathbf{E}_C \\ \mathbf{X} &= \mathbf{T} \mathbf{A}^T + \mathbf{E}_C\end{aligned}\tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}x_{ik} &= \sum_c t_{ic} a_{ck} + e_{ik} \\ \vec{y} &= \vec{t}_1 q_1 + \vec{t}_2 q_2 + \cdots + \vec{t}_C q_C + \vec{f}_C \\ \vec{y} &= \mathbf{T} \vec{q} + \vec{f}_C \\ y_i &= \sum_c q_c t_{ic} + f_i\end{aligned}\tag{4.24}$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{X} \mathbf{W} \\ t_{ic} &= \sum_k w_{kc} x_{ik}\end{aligned}\tag{4.25}$$

Las ecuaciones 4.25 y 4.24 permiten reescribir este modelo como un problema de regresión, tal y como se detalla en [WSE01], de acuerdo a la ecuación 4.26:

$$\begin{aligned}y_i &= \sum_c q_c \sum_k w_{kc} x_{ik} + f_i = \sum_k b_k x_{ik} + f_i \\ \vec{y} &= \mathbf{X} \mathbf{W} \vec{q} + \vec{f}_C = \mathbf{X} \vec{b} + \vec{f}_C\end{aligned}\tag{4.26}$$

donde los coeficientes de la regresión *MCP* son:

$$b_k = \sum_c q_c w_{kc}\tag{4.27}$$

#### 4.2.3.2. Arquitectura de clasificación basada en mínimos cuadrados parciales

Se propone a continuación una arquitectura de clasificación basada en *MCP*. El modelo que se propone parte del estudio de múltiples referencias bibliográficas, en concreto [BW03], [NQVB05], [LW07] y [IMT07], en las que se demuestra teórica y empíricamente la conveniencia del uso de esta técnica, y se adapta a las particularidades de las señales electroencefalográficas de las que se ocupa este trabajo.

Como se describe en esta bibliografía, la aplicación de *MCP* en tareas de clasificación requiere comúnmente sintetizar la matriz de variables dependientes  $\mathbf{Y}$  a partir de los datos observados para poder, a partir de estos datos, extraer las variables latentes,  $\vec{t}_i$ , y las cargas y pesos,  $a_i$ ,  $q_i$  y  $\vec{w}_i$ . En el caso de este trabajo, al tratarse de una distinción entre dos clases de tareas mentales, la matriz  $\mathbf{Y}$  se transforma en un vector  $\vec{y}$  que representa una variable bivalente sintetizada tal y como se describe posteriormente. De alguna forma, la fase de extracción de características explicada en 3.4.2 y reflejada en la figura 3.30, se convierte también en la fase de entrenamiento del clasificador.

Como se ha mostrado en dicha figura, la arquitectura propuesta parte de la matriz  $\mathbf{X}$  que contiene las  $N$  observaciones registradas para las  $M$  variables independientes consideradas. Cada una de sus  $N$  filas es un registro compuesto por las señales  $\vec{x}_{iC_3}$  y  $\vec{x}_{iC_4}$  recogidas en los electrodos  $C_3$  y  $C_4$  para cada uno de intentos,  $i$ , de entrenamiento, convenientemente preprocesadas mediante las transformadas de Fourier y wavelet, y encadenadas.

El vector  $\vec{y}$  se sintetiza de acuerdo con 4.28:

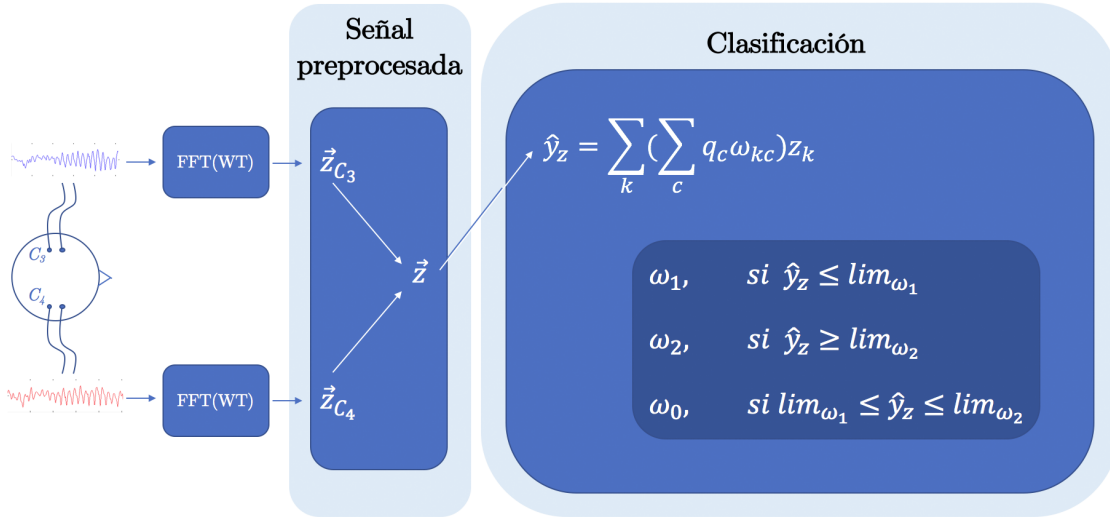
$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{si registro } i \in \omega_1, \\ 1 & \text{si registro } i \in \omega_2 \end{cases} \quad (4.28)$$

A partir de este vector y de la matriz de registros se obtienen las variables latentes,  $\vec{t}_i$ , las cargas y pesos,  $\mathbf{A}$ ,  $\vec{q}$ , y  $\mathbf{W}$ , así como los coeficientes  $\vec{b}$ .

El clasificador conformado con estos resultados, cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 4.5, tomará cada nuevo registro  $\vec{z}$ , compuesto por las señales  $\vec{z}_{C_3}$  y  $\vec{z}_{C_4}$ , registradas en  $C_3$  y  $C_4$  respectivamente, y estimará el valor de la clase a la que pertenecen mediante el modelo regresivo (ecuación 4.29).

$$\hat{y}_z = \sum_k b_k z_k \quad (4.29)$$

A partir de la estimación de  $y$ , el clasificador decidirá la clase a la que pertenece el nuevo registro  $\vec{z}$  de acuerdo a 4.30:



**Figura 4.5:** Arquitectura de clasificación basada en mínimos cuadrados parciales. Clasificación de una nueva observación.

$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } \hat{y}_z \leq \lim_{\omega_1} \\ \omega_2, & \text{si } \hat{y}_z \geq \lim_{\omega_2} \\ \omega_0, & \text{si } \lim_{\omega_1} < \hat{y}_z < \lim_{\omega_2} \end{cases} \quad (4.30)$$

La idoneidad de los límites  $\lim_{\omega_1}$  y  $\lim_{\omega_2}$  se ha explorado ampliamente a través de diversos experimentos que se describen con detalle en el capítulo 5.

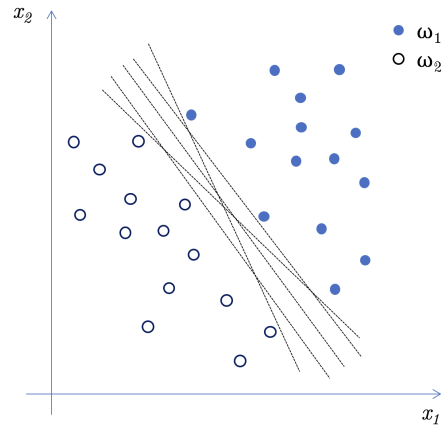
#### 4.2.4. Máquinas de vectores soporte

##### 4.2.4.1. Conceptos previos

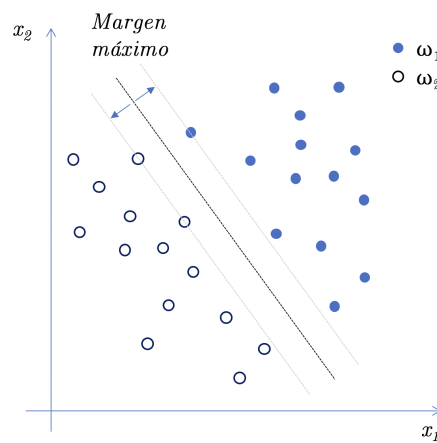
En un problema de clasificación como el que se presenta en este trabajo, el objetivo es construir, a partir de los ejemplos etiquetados de las distintas clases, un clasificador que permita una buena generalización, con una adecuada relación entre la precisión alcanzada para dicho conjunto de entrenamiento y la capacidad de clasificar correctamente los datos desconocidos que se presenten posteriormente. En un ejemplo como el mostrado en la figura 4.6, son diversas las soluciones que permiten separar ambas clases.

En 1964, véase ([Vap06]), Chervonenkis y Vapnik presentaron un algoritmo para la construcción de un hiperplano óptimo de separación que permitiera la clasificación de los datos de entrenamiento maximizando el margen entre los datos de entrenamiento y dicho hiperplano, tal y como muestra la figura 4.7. Este es el modelo más sencillo de Máquinas de Vectores Soporte (o *Support Vector Machines* en la nomenclatura en inglés, en adelante SVMs) también denominado clasificador de margen máximo que funciona correctamente sólo para datos linealmente separables (véase [CST14]).





**Figura 4.6:** Ejemplo de un conjunto de entrenamiento formado por datos de dos clases distintas ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ) y diferentes superficies válidas de separación.



**Figura 4.7:** Superficie de separación que maximiza el margen entre dicha superficie y los datos de entrenamiento.

Dado un conjunto de ejemplos correctamente etiquetado y linealmente separable:

$$\{(\vec{x}_1, y_1), \dots, (\vec{x}_n, y_n)\} \quad \vec{x}_i \in \mathbb{R} \quad y_i = \begin{cases} 1 & \vec{x}_i \in \omega_1, \\ -1 & \vec{x}_i \in \omega_2 \end{cases} \quad (4.31)$$

El hiperplano de separación sería:

$$\pi : \vec{w} \cdot \vec{x} + b = 0 \quad (4.32)$$

Que se construye de forma que:

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{x}_i + b &\geq 1, & y_i &= 1, & \vec{x}_i &\in \omega_1 \\ \vec{w} \cdot \vec{x}_i + b &\leq -1, & y_i &= -1, & \vec{x}_i &\in \omega_2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Tal y como se indica en [Abr03], fijado el hiperplano de separación, siempre es posible reescalar  $\vec{w}$  y  $b$  de manera que se cumplan dichas condiciones sin pérdida de generalidad (véase también [Gun98]). Estas ecuaciones pueden expresarse de manera resumida:

$$y_i (\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b) - 1 \geq 0 \quad (4.34)$$

El hiperplano óptimo de separación será aquel que maximice el margen,  $\rho$ , entre los vectores de ambas clases sujeto a las restricciones anteriores:

$$\rho = \min_{\{i:y_i=1\}} \left[ \frac{\vec{x}_i \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} + b \right] - \max_{\{i:y_i=-1\}} \left[ \frac{\vec{x}_i \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} + b \right] = \frac{2}{|\vec{w}|} \quad (4.35)$$

Se observa, [CV95], que la construcción de este hiperplano dependerá únicamente de un pequeño número de vectores del conjunto de entrenamiento, denominados **vectores soporte**, que son los más cercanos al hiperplano de separación y definen por ello el margen  $\rho$ . Estos vectores son los que cumplen:

$$y_i (\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b) - 1 = 0 \quad (4.36)$$

Tal y como se describe ampliamente en [Vap06], [Abr03] o [Fle09], maximizar 4.35 es equivalente a resolver:

$$\min_{\vec{w} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\vec{w}\|^2 \quad \text{s.a.} \quad y_i (\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b - 1) \geq 0 \quad (4.37)$$

Aplicando la teoría clásica de optimización lagrangiana, siendo la función objetivo:

$$L_P(\vec{w}, b, \alpha_i) \equiv \frac{1}{2} \|\vec{w}\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i (\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b) - 1) \quad (4.38)$$

se obtiene:

$$\frac{\partial L_p}{\partial \vec{w}} = 0 \Rightarrow \vec{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \vec{x}_i \quad (4.39a)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \quad (4.39b)$$

Sustituyendo 4.39a y 4.39b en 4.38, se obtiene la formulación del problema dual  $L_D$ :

$$\begin{aligned} L_D &\equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} \alpha_i \geq 0, \forall i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \end{cases} \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \vec{\alpha}^T H \vec{\alpha} \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} \alpha_i \geq 0, \forall i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.40)$$

siendo  $H = y_i y_j \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j$ .

Conocida la matriz  $H$ , que se construye a partir de los datos de entrenamiento, el problema se centra en encontrar  $\vec{\alpha}$  maximizando:

$$\max \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \vec{\alpha}^T H \vec{\alpha} \right] \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} \alpha_i \geq 0, \forall i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Este es un problema de optimización cuadrática que permite obtener  $\vec{\alpha}$  y, por tanto,  $\vec{w}$  mediante 4.39a.

Para hallar b, basta recordar que los vectores soporte cumplen que:

$$\begin{aligned} y_s(\vec{w} \cdot \vec{x}_s + b) &= 1 \quad \forall \vec{x}_s \in VS \Rightarrow \\ y_s \left( \sum_{m \in s} \alpha_m y_m \vec{x}_m \cdot \vec{x}_s + b \right) &= 1 \quad \forall \vec{x}_s \in VS \end{aligned} \quad (4.42)$$

de donde:

$$b = y_s - \sum_{m \in s} \alpha_m y_m \vec{x}_m \cdot \vec{x}_s \quad (4.43)$$

Normalmente, el valor de b no se obtiene a partir de un único vector soporte sino a partir de la media de todos ellos, de acuerdo a la ecuación 4.44.

$$b = \frac{1}{N_S} \sum_S \left( y_s - \sum_{m \in s} \alpha_m y_m \vec{x}_m \cdot \vec{x}_s \right) \quad (4.44)$$

Construido el hiperplano de separación, la clasificación de un nuevo dato  $\vec{x}_p$  se traduce en determinar en qué lado del hiperplano de decisión se encuentra dicho punto ([Bur98]), calculando:

$$y_p = \text{sgn}(\vec{w} \cdot \vec{x}_p + b) = \text{sgn} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \vec{x}_i \cdot \vec{x}_p + b \right) \quad (4.45)$$

Tal y como se demuestra en [CV95] y [CST14], las condiciones complementarias de Karush-Kuhn-Tucker establecen que cada multiplicador de Lagrange,  $\alpha_i$  y su restricción correspondiente satisfacen que:

$$\alpha_i (y_i (\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b) - 1) = 0 \quad (4.46)$$

Es decir, que aquellos vectores  $x_i$  para los cuales  $\alpha_i > 0$  son precisamente los vectores soporte que cumplen la ecuación 4.36 y son los únicos datos que aportan información para la construcción del hiperplano de separación a través de 4.39a.

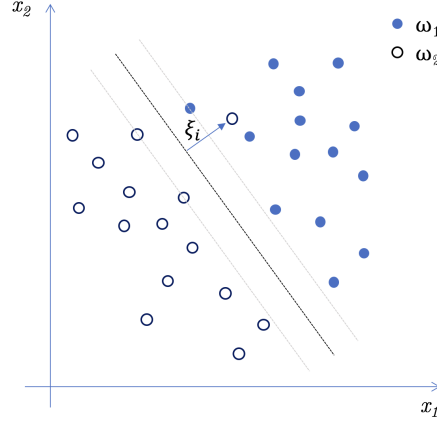
En el caso de trabajar con un conjunto de datos no separable, aquel en el que hay vectores de una clase dentro de la región que ocupan los vectores de la clase contraria, véase figura 4.8, es posible aplicar todo el análisis anterior relajando las restricciones 4.33 ([CV95]).

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{x}_i + b &\geq 1 - \xi_i, & y_i &= 1, & \vec{x}_i &\in \omega_1 \\ \vec{w} \cdot \vec{x}_i + b &\leq -1 + \xi_i, & y_i &= -1, & \vec{x}_i &\in \omega_2 \\ \xi_i &\geq 0 & & & \forall i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para aquellos vectores que, una vez construido el hiperplano, queden situados en la región contraria a la suya, es decir, aquellos datos que serán erróneamente clasificados, el correspondiente valor de  $\xi$  será superior a 1. Por tanto, de alguna forma,  $\sum_i \xi_i$  representa un límite superior del número de errores de entrenamiento.

De esta manera, parece intuitivo plantear el problema minimizando un funcional que contemple tanto el margen entre el hiperplano de separación como el número de errores de clasificación que se cometan al construir dicho hiperplano<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>En [CV95], se propone inicialmente una función más genérica de penalización  $F_\sigma = \sum_i \xi_i^\sigma$  y se justifica la ventaja de resolver el problema para el caso en que  $\sigma = 1$ .



**Figura 4.8:** Conjunto de datos no separable.

$$\begin{aligned} \min_{\vec{w} \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \|\vec{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i^k \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} y_i (\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b) - 1 + \xi_i \geq 0, \forall i \\ \xi_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.48)$$

El parámetro  $C$  permite establecer el grado de penalización que se asigna a los errores de clasificación de los datos del conjunto de entrenamiento frente al tamaño del margen que separa los datos y el hiperplano de decisión.

La reformulación del problema de optimización 4.38 quedaría como sigue:

$$L_P(\vec{w}, b, \alpha_i, \xi_i) \equiv \frac{1}{2} \|\vec{w}\|^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i (\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b) - 1) - \sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i \quad (4.49)$$

De manera análoga al caso separable, el desarrollo del problema lleva a buscar:

$$\max \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \vec{\alpha}^T H \vec{\alpha} \right] \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C, \forall i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

siendo  $\vec{w}$  también en este caso:

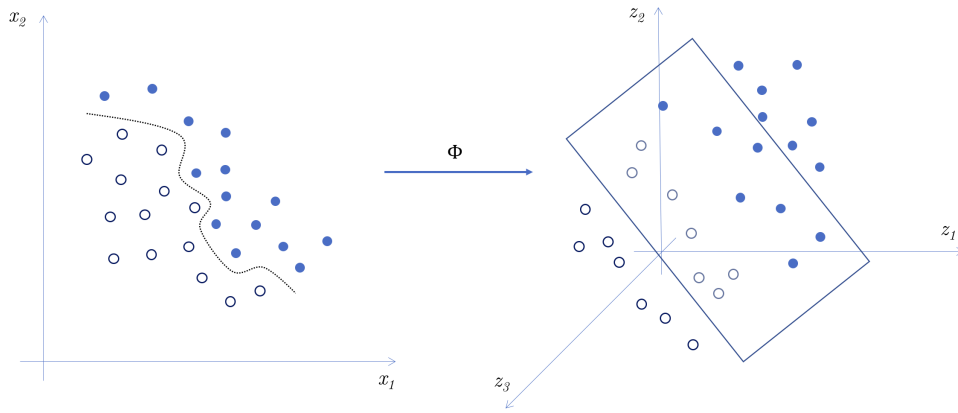
$$\vec{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \vec{x}_i \quad (4.51)$$

y calculándose  $b$  de acuerdo a la ecuación 4.44 para los vectores soporte que son aquellos para los cuales  $0 \leq \alpha_i \leq C$ . Construido el hiperplano de separación con las condiciones suavizadas para contemplar los datos problemáticos, la clasificación de un nuevo dato  $\vec{x}_p$

se traduce de nuevo en determinar en qué lado del hiperplano de decisión se encuentra dicho punto:

$$y_p = \text{sgn}(\vec{w} \cdot \vec{x}_p + b) = \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \vec{x}_i \cdot \vec{x}_p + b\right) \quad (4.52)$$

El verdadero potencial de las SVMs, cuya base se asienta sobre los algoritmos descritos anteriormente, está en poder llevar los conjuntos de datos de entrenamiento cuya superficie de decisión no es lineal a un espacio de dimensión superior donde sí se puede construir este tipo de superficie de separación, pero sin necesidad de conocer la función que transforma los datos de un espacio a otro (figura 4.9).



**Figura 4.9:** Planteamiento del problema no lineal.

Esto es posible si existe una aplicación  $\Phi$  que transforma el espacio de entrada de dimensión  $n$  en un espacio, denominado de características, de dimensión  $N$ , donde los datos son linealmente separables:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad (4.53)$$

En principio, la búsqueda de la superficie de decisión implicaría conocer el conjunto de vectores transformados y encontrar para estos datos  $\vec{w}$  y  $b$ :  $\Phi(\vec{x}_1), \Phi(\vec{x}_2), \dots, \Phi(\vec{x}_n)$ .

Operar en este espacio transformado puede ser extremadamente complejo. Sin embargo, atendiendo a las ecuaciones 4.40, 4.44 y 4.45, es interesante observar que los vectores de datos forman parte de la solución únicamente a través del producto escalar,  $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j$ , tanto para la construcción de la superficie de decisión como para la clasificación de un dato nuevo. Tal y como se detalla en [Bur98], si existiera una función  $K$ , denominada núcleo (o *kernel* en la literatura anglosajona), tal que permita evaluar el producto escalar en el espacio transformado:

$$K(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \Phi(\vec{x}_i) \cdot \Phi(\vec{x}_j) \quad (4.54)$$

se podría utilizar la función  $K$  para construir el hiperplano de decisión en el espacio de características sin necesidad de conocer  $\Phi^2$ .

El desarrollo del problema de optimización es idéntico al descrito en la ecuación 4.50 planteada anteriormente, siendo  $H$  en este caso:

$$H = y_i y_j \Phi(\vec{x}_i) \cdot \Phi(\vec{x}_j) = y_i y_j K(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \quad (4.55)$$

Obtenidos  $\vec{\alpha}$  y  $b$ , de acuerdo a las ecuaciones descritas, en las que el producto vectorial en el espacio de entrada se sustituye por la función núcleo, la clasificación de un nuevo punto se realiza de acuerdo a:

$$y_p = \text{sgn}(\vec{w} \cdot \vec{x}_p + b) = \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i K(\vec{x}_i, \vec{x}_p) + b\right) \quad (4.56)$$

Algunas de estas funciones núcleo son:

- Lineal:

$$K(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j \quad (4.57)$$

- Polinómica:

$$K(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = (\gamma \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j + r)^d, \gamma > 0 \quad (4.58)$$

- Función de base radial:

$$K(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = e^{-\gamma \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2}, \gamma > 0 \quad (4.59)$$

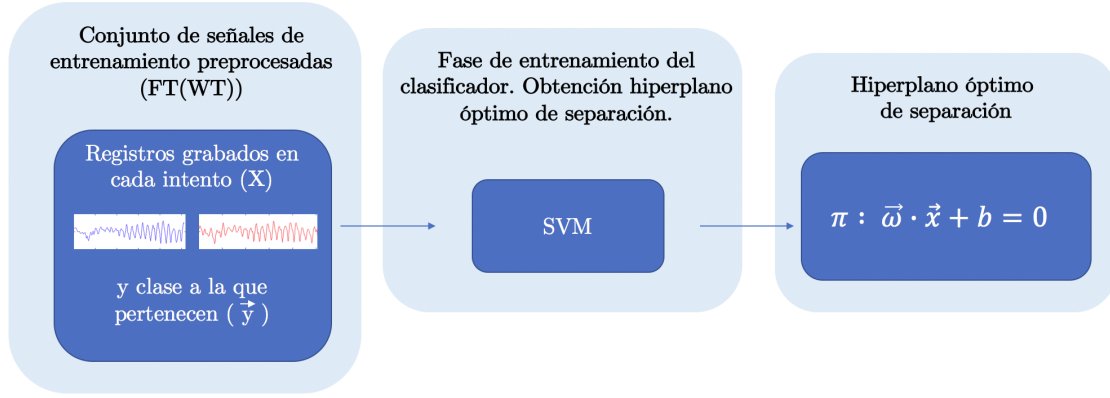
#### 4.2.4.2. Arquitectura de clasificación basada en máquinas de vectores soporte

El diseño del clasificador involucra una primera fase de construcción del hiperplano de separación, cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 4.10, que parte de la matriz  $\mathbf{X}$  que contiene las  $N$  observaciones registradas para las  $M$  variables independientes consideradas. Cada una de sus  $N$  filas es un registro compuesto por las señales  $\vec{x}_{iC_3}$  y  $\vec{x}_{iC_4}$  recogidas en los electrodos  $C_3$  y  $C_4$  para cada uno de intentos,  $i$ , de entrenamiento, convenientemente preprocesadas mediante las transformadas de Fourier y wavelet, y encadenadas.

El vector  $\vec{y}$  se sintetiza de acuerdo con 4.60:

---

<sup>2</sup>En [CV95] o [MBR64] se demuestra que cualquier función que satisfaga el teorema de Mercer representa legítimamente el producto escalar de un espacio de características.



**Figura 4.10:** Arquitectura de clasificación basada en una máquina de vector soporte. Fase de obtención del hiperplano óptimo de separación.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si registro } i \in \omega_1, \\ -1 & \text{si registro } i \in \omega_2 \end{cases} \quad (4.60)$$

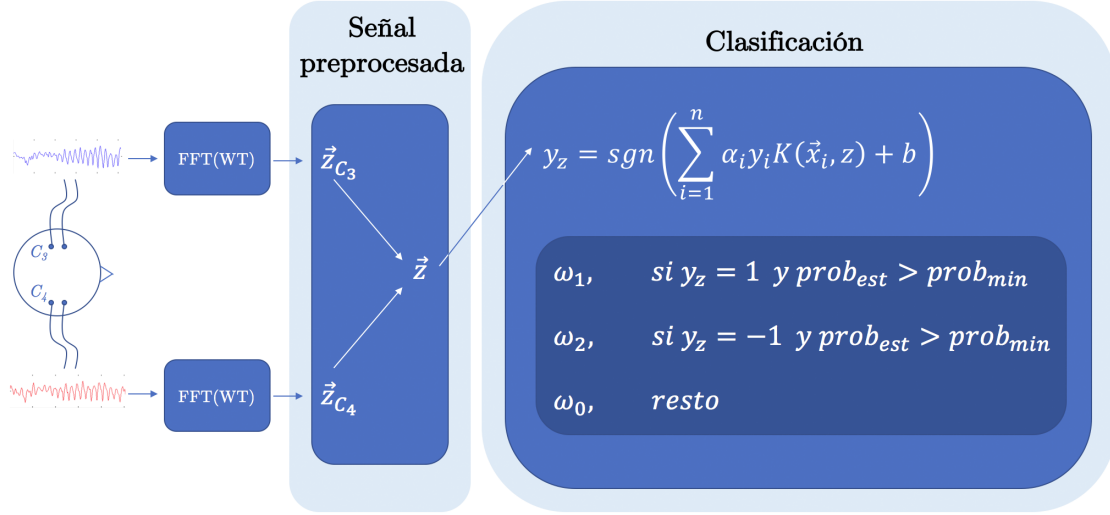
A partir de estos datos de entrenamiento, se construye el hiperplano de decisión tal y como se ha descrito en el apartado anterior haciendo uso de la librería LIBSVM ampliamente descrita en [CL11] y [HCL16]. Inicialmente, se incluyeron en el estudio los núcleos lineal, polinómico y RBF, pero los resultados previos indicaron claramente que el núcleo RBF conseguía un mejor rendimiento en todos los casos. Los experimentos realizados con este núcleo y diferentes parametrizaciones de  $\gamma$  y el factor de coste  $C$  se detallan en el Capítulo 5.

El clasificador construido, cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 4.11, tomará cada nuevo registro  $\vec{z}$ , compuesto por las señales  $\vec{z}_{C_3}$  y  $\vec{z}_{C_4}$ , registradas en los electrodos  $C_3$  y  $C_4$  respectivamente, tras el preprocesamiento elegido (transformada de Fourier, wavelet o combinación de ambas), y estimará el valor de la clase a la que pertenecen mediante la ecuación 4.61.

$$y_z = \text{sgn}(\vec{w} \cdot \vec{z} + b) = \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i K(\vec{x}_i, \vec{z}) + b\right) \quad (4.61)$$

Aunque, en principio, las máquinas de vectores soporte generan un valor no calibrado que representa la etiqueta de la clase predicha para cada dato nuevo, como se deduce de 4.61, la librería LIBSVM incluye una extensión de las SVMs para facilitar una estimación de la probabilidad de la predicción realizada. Basado en los trabajos de [Pla00], [Wu,04] y [LLW07], como se detalla en [CL11], el valor de probabilidad,  $\text{prob}_{est}$ , que se obtiene junto a cada clase predicha,  $y_z$ , permite implementar un clasificador con clase de rechazo tal y como se muestra en la ecuación 4.62.





**Figura 4.11:** Arquitectura de clasificación basada en SVM. Clasificación de una nueva observación.

$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } y_z = 1 \quad \text{y } \text{prob}_{est} > \text{prob}_{min} \\ \omega_2, & \text{si } y_z = -1 \quad \text{y } \text{prob}_{est} > \text{prob}_{min} \\ \omega_0, & \text{resto} \end{cases} \quad (4.62)$$

La configuración del límite  $\text{prob}_{min}$  se ha explorado ampliamente a través de diversos experimentos que se describen con detalle en el Capítulo 5.

### 4.3. Conclusiones y aportaciones

En este capítulo se ha presentado el marco teórico fundamental de las técnicas propuestas para la clasificación de las señales EEG y se ha realizado la propuesta de diversas arquitecturas de clasificación para las señales EEG que serán evaluadas en el Capítulo 5.

Se han descrito en profundidad cuatro técnicas de clasificación adaptadas a los algoritmos de extracción de características propuestos anteriormente y optimizadas para el tratamiento de señales EEG. En primer lugar, se ha presentado un clasificador basado en la distancia entre las señales originales y las recuperadas mediante las matrices de características modificadas obtenidas por el algoritmo *ACP* robusto. Sobre las señales transformadas por este mismo algoritmo se ha descrito el diseño de un clasificador basado en el análisis discriminante robustecido. A continuación, se ha propuesto una adaptación del algoritmo de regresión lineal para la clasificación de señales electroencefalográficas a partir de las componentes latentes construidas mediante el algoritmo *MCP* en su versión normal y robustecida. Finalmente, se ha detallado en profundidad la utilización de las máquinas de vectores soporte como clasificador de este tipo de señales.

En todos los casos, a partir del marco teórico y el estudio posterior de las características

de cada técnica se ha propuesto una arquitectura específica de clasificación para, junto con las técnicas propuestas de preprocesamiento y extracción de características, diseñar sendas interfaces cerebro-ordenador que puedan ser objeto de estudio y experimentación.



## Capítulo 5

# Resultados experimentales

### 5.1. Introducción

En este capítulo se analizan en profundidad los experimentos más relevantes llevados a cabo con el fin de validar las hipótesis planteadas anteriormente. Comienza el capítulo con la descripción de las bases de datos electroencefalográficas utilizadas para esta fase de experimentación. A continuación, se expone el análisis estadístico realizado para validar y comparar el rendimiento de todas las arquitecturas propuestas, y se muestran y discuten los resultados obtenidos, con el objetivo de proponer una arquitectura final unificada para el diseño de una BCI. Se analizan y comparan las tasas de acierto de más de 20000 parametrizaciones distintas de las arquitecturas diseñadas sobre las 42 sesiones registradas por los usuarios, lo que implica más de 800000 tasas de acierto. La selección de las parametrizaciones concretas que se someten a estudio para cada arquitectura (número de componentes independientes o variables latente seleccionadas, núcleo elegido para las máquinas de vector soporte y factores de coste sometidos a análisis, etc.) surgen de una fase previa de experimentos que no se incluye en este documento. Los resultados de esta fase diferenciaron claramente qué parametrizaciones podían resultar de interés y cuáles no aportarían nada al diseño final, razón por la cual este capítulo se centrará únicamente en el análisis detallado de las primeras.

### 5.2. Descripción de los conjuntos de datos

Los experimentos realizados se han llevado a cabo con dos bases de datos de señales electroencefalográficas grabadas en el Departamento de Informática Médica de la Universidad de Graz y en el Departamento de Electrónica de la Universidad de Alcalá, respectivamente.

En este apartado se describen los detalles más relevantes de los procesos de grabación, los sujetos y las señales obtenidas.

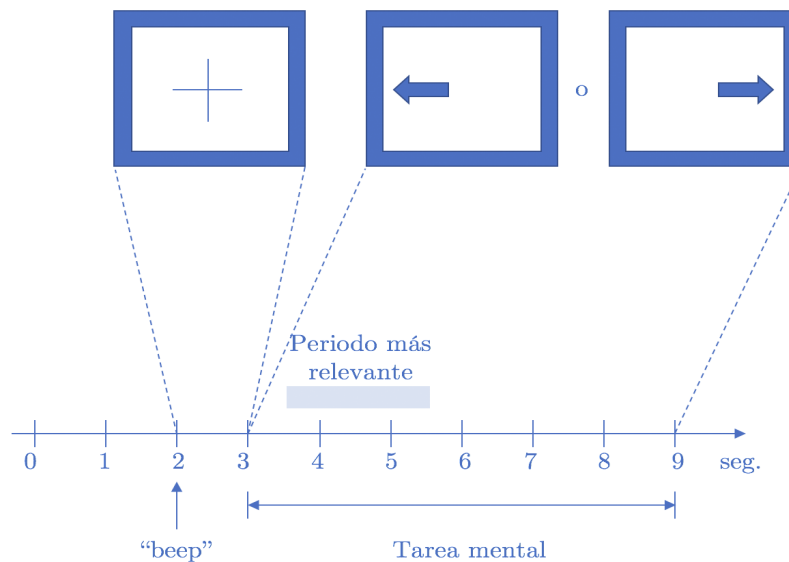
### 5.2.1. Paradigma experimental

En ambos grupos de investigación, el paradigma experimental utilizado para la obtención de las señales es el mismo.

Se sitúa al sujeto sentado frente a la pantalla del ordenador en una posición cómoda y relajada, con los ojos abiertos, y con los electrodos de grabación de señales cerebrales colocados sobre la superficie del cuero cabelludo en las posiciones  $C_3$ ,  $C_z$  y  $C_4$ , fijados mediante un gorro y conectados al sistema de adquisición de datos.

Durante las grabaciones, se solicita al usuario que imagine, de forma sucesiva y aleatoria, dos tareas mentales distintas: el movimiento de su mano derecha o el movimiento de su mano izquierda. Se pretende que los individuos realicen el mismo proceso que llevarían a cabo si realmente fueran a mover su mano, pero bloqueando el movimiento final, es decir, sin llegar a moverse.

Estas tareas se realizan según la siguiente secuencia temporal, representada en la figura 5.1, que denominaremos **intento**: en el transcurso de los dos primeros segundos, la pantalla del ordenador permanece en negro y el individuo puede mantenerse relajado. En  $t = 2s$  se escucha una señal acústica y se dibuja una cruz en pantalla alertando al sujeto de que el comienzo del intento es inminente. Finalmente, en  $t = 3s$ , se presenta una flecha que indica la mano cuyo movimiento ha de ser imaginado desde este instante hasta el final de intento en  $t = 9s$ .



**Figura 5.1:** Paradigma experimental de un intento.

Llamaremos **serie** a una secuencia de **intentos** sucesivos, sin pausas entre ellos, en los que se presentan las tareas mentales movimiento de mano izquierda y movimiento de mano derecha el mismo número de veces de forma aparentemente aleatoria. En cada

una de las bases de datos el número de intentos por serie variará según los datos que se aportan más adelante.

Finalmente, y para concretar mejor la estructura temporal de las grabaciones, llamaremos **sesión** una secuencia de series realizadas por un mismo sujeto de forma más o menos seguida con pequeños descansos intermedios (en el transcurso de una mañana o una tarde, por ejemplo).

Se detallan a continuación las características particulares de cada base de datos.

### 5.2.2. Base de datos de la Universidad Tecnológica de Graz

Las grabaciones del grupo de Graz pertenecen a cuatro sujetos distintos. Las señales del primero de ellos, al que llamaremos g1, se pusieron a disposición de la comunidad científica a raíz de la primera competición internacional de BCIs llevada a cabo en el año 2000. Las señales de los otros tres sujetos, que denominaremos l1, o3 y o8, se encuentran disponibles en la página web personal de Prof. Dr. Alois Schlögl ([Sch04]) miembro del Instituto de Interfaces Usuario-Máquina de la citada Universidad Tecnológica de Graz.

Del sujeto g1, se encuentran disponibles tres series de 40 intentos grabadas con realimentación en una única sesión. Los sujetos l1, o3 y o8 grabaron tres sesiones consistentes en tres series y 40 intentos por serie, lo que brinda un total de 360 intentos por sujeto. En este caso, sin realimentación.

La recogida de los datos se llevó a cabo con un amplificador de la empresa *g.tec Guger Technologies* haciendo uso de electrodos de *Ag/AgCl*.

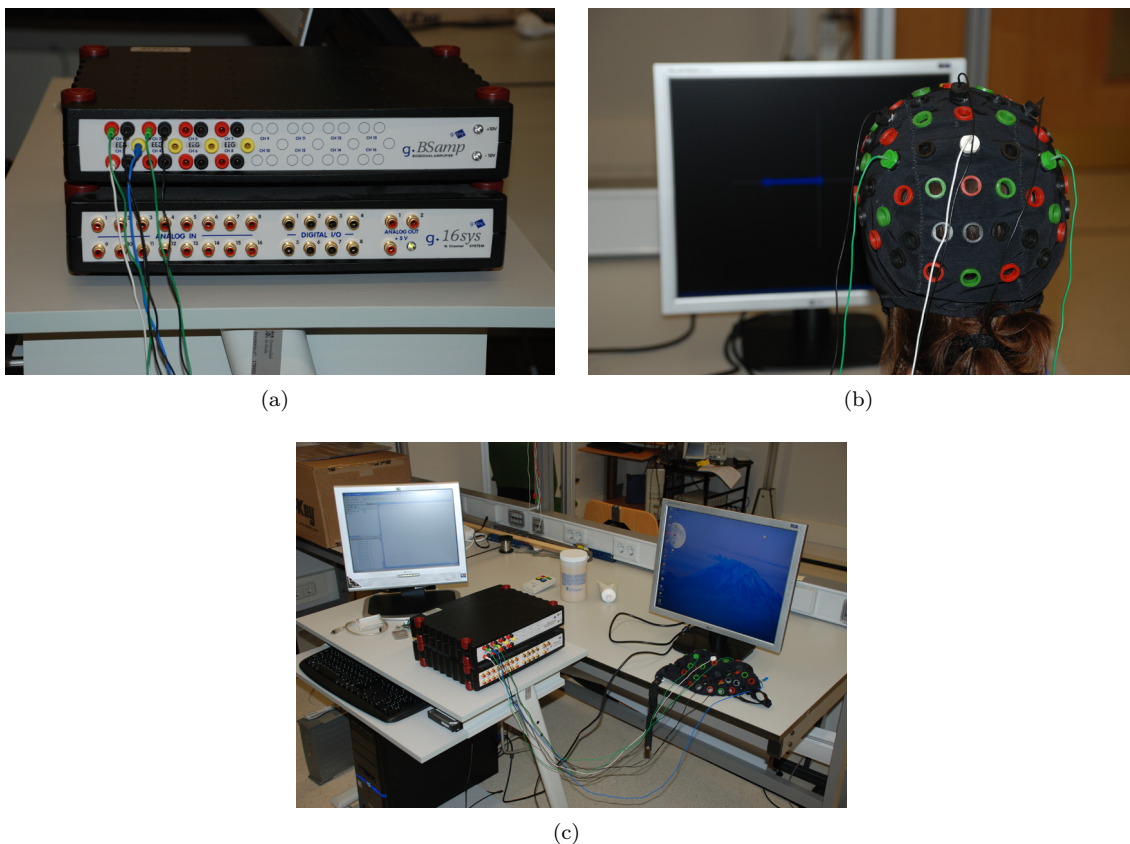
Las señales de tomaron mediante registro bipolar de los canales  $C_3$ ,  $C_z$  y  $C_4$  y fueron filtradas posteriormente entre 0.5 y 30 Hz.

Estas grabaciones se utilizaron para llevar a cabo parte de la fase previa de experimentos con la que seleccionar las parametrizaciones con las que evaluar las arquitecturas finalmente estudiadas. La incertidumbre acerca de los detalles exactos del procedimiento de grabación y su posible procesamiento posterior ante la aparición de algunos resultados anómalos para algunas de las series grabadas, recomendaron el registro propio en el Departamento de Electrónica de una base de datos completa con la que proseguir con la investigación.

### 5.2.3. Base de datos de la Universidad de Alcalá

Con el objetivo de completar el trabajo de investigación presentado en este documento, el Departamento de Electrónica de la Universidad de Alcalá adquirió la equipación necesaria para recoger una amplia base de datos de señales electroencefalográficas e implementar una BCI completa. El sistema está compuesto por un amplificador *gBSamp* de 8 canales de la empresa *g.tec Guger Technologies* con electrodos de *Au*, un ordenador personal con procesador Intel Core 2 6600 2.40 GHz y 4Gb de memoria RAM, y dos pantallas

para permitir, simultáneamente, la realización de los intentos por parte de los sujetos y la comprobación de todos los parámetros de funcionamiento por parte del investigador. En la figura 5.2 pueden verse algunos detalles del equipo utilizado en nuestros registros.



**Figura 5.2:** Fotografías del sistema de registro de señales EEG utilizado para grabar la base de datos de la Universidad de Alcalá.

Las señales grabadas pertenecen a series de intentos realizados por 12 sujetos distintos, cuyos detalles completos (individuos, número de sesiones y series) se resumen en la tabla 5.1. En todos los casos, se grabaron 60 intentos por serie y se dispone de un total de 42 series grabadas por los distintos voluntarios. Las señales se tomaron, al igual que en el caso de Graz, mediante registro bipolar de los canales  $C_3$ ,  $C_z$  y  $C_4$ .

**Tabla 5.1:** Detalles de la base de datos de señales EEG de la Universidad de Alcalá

Sujeto	Edad	Género	Lateralidad	Sesión	Serie
A01	36	H	Diestro	1	1
				2	2
					3
				1	1

— Continúa en la página siguiente —

A02      26      H      Diestro

Sujeto	Edad	Género	Lateralidad	Sesión	Serie
				2	2
					3
				3	4
					5
				4	6
					7
					8
				A03	34
2					
2	3				
	4				
A04	34	H	Diestro	1	1
				2	2
					3
				3	4
					5
A05	35	M	Diestra	1	1
				2	2
					3
				3	4
					5
A06	19	M	Diestra	1	1
					2
				2	3
					4
				3	5
					6
A07	18	H	Diestro	1	1
					2
				2	3
					4
				3	5
					6
A08	24	H	Diestro	1	1
A09	29	H	Diestro	1	1

Continúa en la página siguiente



Sujeto	Edad	Género	Lateralidad	Sesión	Serie
					2
A10	24	H	Diestro	1	1
A11	24	H	Diestro	1	1
					2
A12	24	H	Diestro	1	1

Con la intención de completar la información almacenada en la base de datos, todos los sujetos fueron grabados en vídeo y se procedió a la captura simultánea de las pantallas del ordenador con el programa *Camtasia Recorder*.

### 5.3. Descripción general de los experimentos

Las diferentes hipótesis planteadas en los capítulos precedentes son entrenadas y evaluadas en este capítulo mediante un amplio rango de experimentos y comparativas.

Para ello, sobre cada una de las 42 series disponibles, se entrena y valida cada una de las parametrizaciones de las arquitecturas a las que dan lugar las hipótesis descritas. Todos los experimentos y los resultados expuestos son fruto de un proceso de validación cruzada en el que se toman los 60 intentos grabados en cada serie y se dividen en diez grupos. Cada posible parametrización de cada arquitectura se valida entrenando el sistema con el conjunto de datos formado por nueve de los grupos y probando con el grupo restante. El proceso se repite en 10 iteraciones (*10-fold cross validation*) para entrenar y probar con todas las combinaciones de conjuntos posibles. La tasa de acierto de una determinada parametrización de una arquitectura se calcula como la media de los diez resultados en cada iteración<sup>1</sup>.

La comparación del rendimiento de los distintos algoritmos propuestos, con el fin de **rechazar la hipótesis nula** que plantea que **dichos rendimientos no son significativamente diferentes**, se realizará mediante el test de Friedman tal y como se describe en [Dem06], junto con el test de Nemenyi como prueba a posteriori, dado que los datos estudiados no tienen distribuciones normales.

El test de Friedman ordena los algoritmos en función de su tasa de acierto para cada serie, asignando la posición 1 al algoritmo con mejor resultado para la serie en consideración, posición 2 al algoritmo con el segundo mejor resultado, etc. En caso de algoritmos con igual resultado, se les asigna la media de las posiciones.

Siendo  $r_{ij}$  la posición del algoritmo  $j$  para la serie  $i$ , este test compara los métodos estudiando la media de sus posiciones para todas las series disponibles,  $R_j$ :

$$R_j = \frac{1}{N} \sum_i r_{ij} \quad (5.1)$$

<sup>1</sup>Los experimentos se han realizado sobre un clúster de computación cuyas características pueden consultarse en el Apéndice A.

siendo  $N$  el número de series.

La tabla 5.2 muestra, como ejemplo, las tasas de acierto de cuatro hipotéticas arquitecturas evaluadas contra nueve conjuntos de datos.

**Tabla 5.2:** Tasas de acierto para un ejemplo que el que se compara el rendimiento de cuatro arquitecturas frente a nueve conjuntos de datos mediante el test de Friedman.

	% acierto A1	% acierto A2	% acierto A3	% acierto A4
Conjunto 1	90	50	73	45
Conjunto 2	80	75	60	75
Conjunto 3	75	0	30	80
Conjunto 4	65	25	25	35
Conjunto 5	70	10	35	40
Conjunto 6	85	60	15	25
Conjunto 7	45	40	50	20
Conjunto 8	95	25	15	15
Conjunto 9	65	55	45	35

El test de Friedman ordena los algoritmos en función de su tasa de acierto para cada conjunto de datos obteniendo la ordenación reflejada en la tabla 5.3,

**Tabla 5.3:** Ordenación de las arquitecturas para cada conjunto de datos.

	Posición A1	Posición A2	Posición A3	Posición A4
Conjunto 1	1	3	2	4
Conjunto 2	1	2.5	4	2.5
Conjunto 3	2	4	3	1
Conjunto 4	1	3.5	3.5	2
Conjunto 5	1	4	3	2
Conjunto 6	1	2	4	3
Conjunto 7	2	3	1	4
Conjunto 8	1	2	3.5	3.5
Conjunto 9	1	2	3	4

Las posiciones medias calculadas por el test de Friedman de cada arquitectura, serían:

$$R_1 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 r_{ij} = 1,22 \quad R_2 = 2,89 \quad R_3 = 3,00 \quad R_4 = 2,89 \quad (5.2)$$

El estadístico de contraste del test de Friedman,  $Q$ , véase [Fri37], viene dado por la ecuación 5.3:

$$Q = \frac{12N}{k(k+1)} \left[ \sum_j R_j^2 - \frac{k(k+1)^2}{4} \right] \quad (5.3)$$

siendo  $k$  el número de algoritmos y  $N$  el número de conjuntos de datos.

Para un número alto de conjuntos de datos (superior a 5),  $Q$  puede aproximarse mediante una distribución  $\chi^2$  con  $k - 1$  grados de libertad. De esta forma, para un determinado nivel de significancia  $\alpha$ , la hipótesis nula puede rechazarse si  $Q > \chi_\alpha^2$ .

Para el ejemplo descrito anteriormente, el valor del estadístico viene dado por la ecuación 5.4:

$$Q = \frac{12 * 9}{4 * 5} \left[ \sum_j R_j^2 - \frac{4 * 5^2}{4} \right] = 11,80 \quad (5.4)$$

La hipótesis nula debe ser rechazada dado que  $11,80 > 7,815$ , valor crítico de  $\chi^2$  con  $k - 1 = 3$  grados de libertad para un nivel de significancia  $\alpha = 0,05$ , o, justificado de otra forma, el *valor - p* =  $0,0081 < 0,05$ . Para todos los experimentos detallados en adelante,  $\alpha = 0,05$  será el nivel de significancia de referencia y los resultados del test de Friedman se mostrarán en forma de tabla indicando los valores de  $Q$ ,  $k - 1$  y el *valor - p*. Siempre que este último sea menor que  $0,05$ , la hipótesis nula quedará rechazada. La tabla 5.4 refleja estos valores para los datos del ejemplo.

**Tabla 5.4:** Resultados del test de Friedman para las tasas de acierto del ejemplo planteado.

$Q$	$k - 1$	<i>valor - p</i>
11.80	3	0.0081

Una vez rechazada la hipótesis nula, tal y como ocurrirá en muchos de los casos analizados, es necesario encontrar qué algoritmos son significativamente mejores. Es una tarea especialmente complicada cuando el número de algoritmos comparado es tan alto como el del presente trabajo. El test de Nemenyi, véase de nuevo [Dem06], similar al test de Tukey para ANOVA en condiciones de normalidad, establece que dos métodos son significativamente diferentes si la diferencia entre sus posiciones medias es mayor que la denominada distancia crítica (*DistCrt*) dada por la ecuación 5.5:

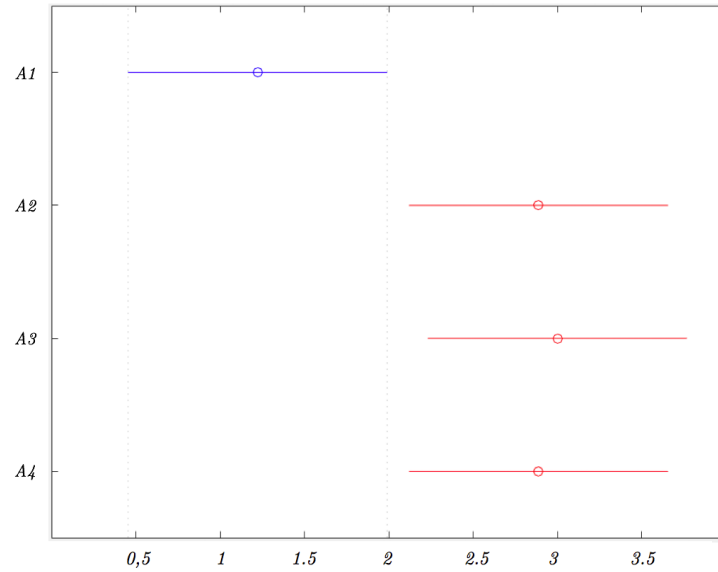
$$DistCrt = q_\alpha \sqrt{\frac{k(k+1)}{6N}} \quad (5.5)$$

siendo  $q_\alpha$  el valor crítico del estadístico rango estudentizado para un número infinito de grados de libertad dividido entre  $\sqrt{2}$ .

Para el ejemplo descrito anteriormente, el valor de la distancia crítica vendría dado por la ecuación 5.6

$$DistCrt = \frac{3,31}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4 * 5}{6 * 9}} = 1,42 \quad (5.6)$$

Los resultados de este test se mostrarán en adelante de manera gráfica tal y como se puede ver en la figura 5.3 para los datos del ejemplo anterior. En esta gráfica se representa para cada método (A1, A2, A3 y A4) sus posición media (puntos medios en las barras del dibujo y valores en el eje de abscisas) y la distancia crítica (longitud de las líneas). En azul, se representará el mejor algoritmo o variante y el resto de mostrarán en rojo.



**Figura 5.3:** Representación gráfica de la comparación de las hipotéticas arquitecturas del ejemplo descrito.

Se exponen y analizan a continuación todos los experimentos realizados para comparar las arquitecturas propuestas con sus correspondientes parametrizaciones y los resultados de cada modelo diseñado. Inicialmente, se describen las arquitecturas de preprocesamiento evaluadas con todos los algoritmos. A continuación, empezando por las alternativas basadas en *ACP*, después *MCP* y finalmente *SVM*, se enumeran y describen en profundidad todas las arquitecturas diseñadas y sus distintas parametrizaciones. En cada apartado, se mostrarán los resultados de todos los experimentos llevados a cabo, los detalles del análisis estadístico realizado y se expondrán las conclusiones alcanzadas.

## 5.4. Preprocesamiento

Inicialmente, en la fase de preprocesamiento, se evaluaron cuatro propuestas detalladas en el apartado 3.2:

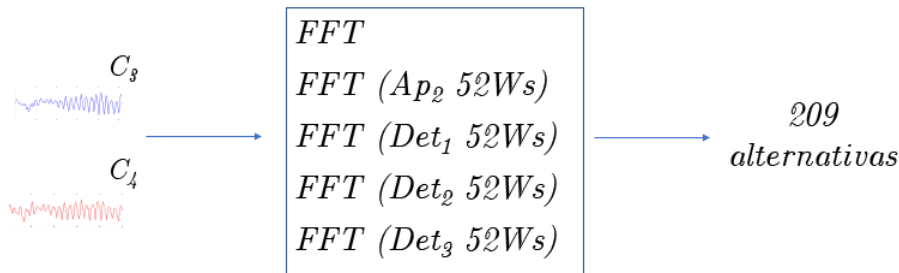
- *PR1*: Tomar directamente como características las señales grabadas en los electrodos  $C_3$  y  $C_4$ .
- *PR2*: Seleccionar como características las componentes frecuenciales de las señales obtenidas mediante la transformada de Fourier.
- *PR3*: Realizar la transformada wavelet para obtener los tres primeros niveles de la descomposición y utilizar como características los coeficientes de cada nivel (aproximación o detalle) individualmente. Es decir, seis posibles modelos distintos según se utilice como vector de entrada de la siguiente etapa los coeficientes de aproximación del primer, segundo o tercer nivel, o los correspondientes niveles de detalle.

- *PR4*: Emplear como características las componentes frecuenciales de las señales obtenidas a partir de la descomposición wavelet en cada uno de los distintos niveles también de forma individual. Esta alternativa también genera, en realidad, seis posibles alternativas distintas de preprocesamiento.

Las dos primeras propuestas sirven como referencia para estudiar la aportación de la transformada wavelet y de la fusión de ésta con la transformada de Fourier, evaluando así la hipótesis planteada en 3.2.3.

En absolutamente todos los estudios previos, los mejores resultados se obtuvieron siempre combinando el uso de la transformada de Fourier con la transformada wavelet por lo que, finalmente, los experimentos llevados a cabo se centraron en realizar el preprocesamiento mediante las alternativas PR2 y PR4. De los coeficientes obtenidos en la transformada wavelet, sólo los de aproximación de segundo nivel o los de detalle de nivel uno, dos o tres, generaron resultados satisfactorios, por lo que son estos los que se prueban en las arquitecturas analizadas.

Finalmente, el estudio práctico también compara la eficiencia de las wavelets seleccionadas en el apartado anterior: haar, daubechies (db2-db11), coiflets (coif1-coif5), symlets (sym2-sym8), biorthogonal (bior1.3-bior6.8) y reverse biorthogonal (rbio1.3-rbio6.8). Se han sometido a estudio, por tanto, 52 subfamilias de wavelets, haciendo uso de los coeficientes de aproximación de nivel 2 o los de detalle de primer, segundo o tercer nivel, para cada una de las cuales se han implementado y probado las alternativas enunciadas, PR2 y PR4, tal y como se muestra en la figura 5.4.



**Figura 5.4:** Alternativas analizadas para el preprocesamiento de las señales electroencefalográficas.

## 5.5. Arquitecturas basadas en ACP

### 5.5.1. Descripción de las arquitecturas analizadas

#### 5.5.1.1. Extracción y selección de características

En todas las arquitecturas estudiadas en este apartado, se toma como base para realizar la extracción y selección de características el análisis de componentes principales robusto tal y como se indicó en el apartado 4.2.1.2. Para evaluar las hipótesis planteadas en

los apartados 3.3.3.1 y 3.3.2, se proponen las siguientes alternativas ya adelantadas en aquellas secciones:

1. La primera alternativa, denotada *ACP1*, parte del apartado 3.3.2, donde se propone una arquitectura basada en la construcción de dos matrices especializadas  $\mathbf{F}_{\text{robC}_3}$  y  $\mathbf{F}_{\text{robC}_4}$  para la extracción de características a partir de los registros obtenidos en  $C_3$  y  $C_4$ . Allí se detalla cómo la realización de una tarea mental consistente en imaginar el movimiento de la mano izquierda genera la aparición de un patrón característico en el registro del canal  $C_3$  del electroencefalograma, mientras que la imaginación del movimiento de la mano derecha genera dicho patrón en  $C_4$ . Esta arquitectura toma, por tanto, los datos de entrenamiento de cada serie en los que los sujetos imaginaban el movimiento de su mano izquierda y, aplicando el algoritmo de análisis de componentes modificado, construye  $\mathbf{F}_{\text{robC}_3}$ . Igualmente, se obtiene  $\mathbf{F}_{\text{robC}_4}$  a partir de los registros en los que los sujetos imaginaban mover su mano derecha.
2. Con el objetivo de contrastar la hipótesis acerca del análisis especializado de las características, se propone una segunda alternativa, *ACP2*, en la que también se obtienen dos matrices, pero analizando las señales cruzadas. Es decir, se construye  $\mathbf{F}_{\text{robC}_3}$  a partir de los registros en los que los sujetos imaginaban mover su mano derecha y  $\mathbf{F}_{\text{robC}_4}$  a partir de los registros en los que los sujetos imaginaban mover su mano izquierda. Estas matrices se denominarán **no especializadas** y se evaluará si pueden extraer, de alguna forma, características relevantes para el análisis.
3. En tercer lugar, trabajando sobre la misma hipótesis, se propone una arquitectura que construye las cuatro matrices descritas anteriormente (especializadas y no especializadas) con el fin de evaluar si su utilización conjunta aporta información relevante, *ACP3*.

Aplicado el algoritmo ACP sobre las correspondientes señales de entrenamiento de acuerdo a las tres alternativas planteadas, se obtiene el conjunto de autovectores y autovalores correspondientes, entre los que han de elegirse aquellos con los que se construye la matriz de características tal y como se detalla en 3.3.1.2. De acuerdo a los experimentos previos, se tomaron, inicialmente, los nueve autovectores con mayor autovalor asociado para la construcción de las matrices.

$$\mathbf{F} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_9) \quad (5.7)$$

Sobre esta base, se analizan algunas alternativas en función de las componentes principales con las que se construye la matriz de características:

1. La primera variante, denotada por *ACPX*<sup>0</sup> (con  $X = 1, 2$  o  $3$  según lo explicado anteriormente), toma los nueve autovectores para construir la matriz de características.

2. La segunda variante, denotada por  $ACPX^{-1}$ , elimina de la matriz de características el autovector con mayor autovalor asociado de acuerdo a la ecuación 5.8a y, en una segunda versión,  $ACPX^{-2}$ , elimina los dos autovectores con mayor autovalor asociado, de acuerdo a la ecuación 5.8b, para evaluar la hipótesis planteada en 3.3.3.1, donde se sugiere la posibilidad de que el ruido presente en las señales electroencefalográficas genere una serie de autovectores con autovalores de magnitud relevante que degraden el análisis.

$$\mathbf{F}_{ver1} = (\vec{a}_2 \vec{a}_3 \dots \vec{a}_9) \quad (5.8a)$$

$$\mathbf{F}_{ver2} = (\vec{a}_3 \vec{a}_4 \dots \vec{a}_9) \quad (5.8b)$$

3. La tercera variante, que se denotará por  $ACPX_5^{-Y}$ , toma únicamente cinco autovectores, de acuerdo a la ecuación 5.9, para la construcción de la matriz de características, estudiando el efecto que ello tiene sobre la precisión de la interfaz y la posibilidad de sintetizar aún más el conjunto de características extraído.

$$\mathbf{F} = (\vec{a}_n \vec{a}_{n+1} \dots \vec{a}_{n+5}) \quad (5.9)$$

#### 5.5.1.2. Clasificación

Finalmente, se proponen y evalúan tres clasificadores sobre las características extraídas con las arquitecturas propuestas anteriormente:

1. El clasificador basado en distancias entre los vectores originales y transformados descrito en 4.2.1.
2. El análisis discriminante robusto descrito en 4.2.2.2.
3. Máquinas de vectores soporte descritas en 4.2.4. Si bien las máquinas de vectores soporte pueden procesar, como se describirá más tarde, las señales que salen directamente de la fase de preprocesado, se incluyó en la etapa de experimentación la posibilidad de clasificar la información obtenida por el análisis *ACP*.

#### 5.5.2. Resumen de las arquitecturas analizadas

Las arquitecturas basadas en *ACP* evaluadas son, por tanto, las siguientes:

- *ACP1rda*:
  - Preprocesamiento según 5.4: *FFT*, *Ap2(52Wvs)*, *Det1(52Wvs)*, *Det2(52Wvs)* o *Det3(52Wvs)*.
  - Construcción de las matrices de características mediante *ACP1* con:

- $ACP1^0 rda$ : Nueve autovectores más significativos.
  - $ACP1^{-1} rda$ : Eliminando el autovector más significativo.
  - $ACP1^{-2} rda$ : Eliminando los dos autovectores más significativos.
- Clasificación por análisis discriminante robusto con rechazo.
- Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 3 alternativas de selección de autovectores  $\rightarrow$  627 variantes.
- $ACP1dist$ :
  - Preprocesamiento según 5.4:  $FFT$ ,  $Ap2(52Wvs)$ ,  $Det1(52Wvs)$ ,  $Det2(52Wvs)$  o  $Det3(52Wvs)$ .
  - Construcción de las matrices de características mediante  $ACP2$  con:
    - $ACP1^0 dist$ : Nueve autovectores más significativos.
    - $ACP1^{-1} dist$ : Eliminando el autovector más significativo.
    - $ACP1^{-2} dist$ : Eliminando los dos autovectores más significativos.
  - Clasificación por distancias entre los vectores originales y transformados.
  - Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 3 alternativas de selección de autovectores  $\rightarrow$  627 variantes.
- $ACP1_5^0 rda$ :
  - Preprocesamiento según 5.4:  $FFT$ ,  $Ap2(52Wvs)$ ,  $Det1(52Wvs)$ ,  $Det2(52Wvs)$  o  $Det3(52Wvs)$ .
  - Construcción de las matrices de características mediante  $ACP1$  con:
    - $ACP1_5^0 rda$ : Cinco autovectores más significativos.
    - $ACP1_5^{-1} rda$ : Eliminando el autovector más significativo.
    - $ACP1_5^{-2} rda$ : Eliminando los dos autovectores más significativos.
  - Clasificación por análisis discriminante robusto con rechazo.
  - Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 3 alternativas de selección de autovectores  $\rightarrow$  627 variantes.
- $ACP1svm$ :
  - Preprocesamiento según 5.4:  $FFT$ ,  $Ap2(52Wvs)$ ,  $Det1(52Wvs)$ ,  $Det2(52Wvs)$  o  $Det3(52Wvs)$ .
  - Construcción de las matrices de características mediante  $ACP1$  con:
    - $ACP1^0 svm$ : Nueve autovectores más significativos.
    - $ACP1^{-1} svm$ : Eliminando el autovector más significativo.
    - $ACP1^{-2} svm$ : Eliminando los dos autovectores más significativos.



- Clasificación por máquinas de vectores soporte de núcleo RBF, factor de coste  $c = 100, 1000, 10000$ .
- Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 3 alternativas de selección de autovectores \* 3 parametrizaciones de las SVM  $\rightarrow 5643$  variantes.
- *ACP2rda*:
  - Preprocesamiento según 5.4: *FFT*, *Ap2(52Wvs)*, *Det1(52Wvs)*, *Det2(52Wvs)* o *Det3(52Wvs)*.
  - Construcción de las matrices de características mediante *ACP2* con:
    - *ACP2<sup>0</sup> rda*: Nueve autovectores más significativos.
    - *ACP2<sup>-1</sup> rda*: Eliminando el autovector más significativo.
    - *ACP2<sup>-2</sup> rda*: Eliminando los dos autovectores más significativos.
  - Clasificación por análisis discriminante robusto con rechazo.
  - Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 3 alternativas de selección de autovectores  $\rightarrow 627$  variantes.
- *ACP3rda*:
  - Preprocesamiento según 5.4: *FFT*, *Ap2(52Wvs)*, *Det1(52Wvs)*, *Det2(52Wvs)* o *Det3(52Wvs)*.
  - Construcción de las matrices de características mediante *ACP3* con:
    - *ACP3<sup>0</sup> rda*: Nueve autovectores más significativos.
    - *ACP3<sup>-1</sup> rda*: Eliminando el autovector más significativo.
    - *ACP3<sup>-2</sup> rda*: Eliminando los dos autovectores más significativos.
  - Clasificación por análisis discriminante robusto con rechazo.
  - Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 3 alternativas de selección de autovectores  $\rightarrow 627$  variantes.

En total, se están sometiendo a análisis 8778 variantes de la arquitectura genérica basada en ACP.

### 5.5.3. Resultados

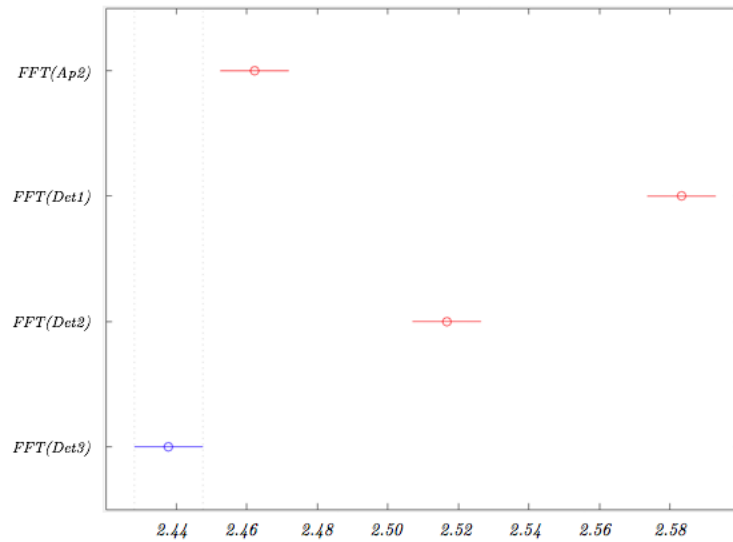
En primer lugar, se analizarán los resultados relativos a las técnicas de preprocesamiento para las alternativas descritas basadas en *ACP*. El objetivo es comprobar si hay alguna diferencia significativa entre el uso de las diferentes arquitecturas mostradas en la figura 5.4, es decir, entre la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de aproximación de nivel 2, y los coeficientes wavelet de detalle de niveles 1, 2 y 3. Para ello, se evalúan

**Tabla 5.5:** Resultados del test de Friedman para las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en ACP.

$Q$	$k - 1$	$valor - p$
435.81	3	3.86 e-94

las tasas de acierto agrupadas en función del método de preprocesado elegido mediante el test de Friedman, obteniendo los resultados mostrados en la tabla 5.5.

El valor- $p$  indica que se debe rechazar la hipótesis nula y, por tanto, las alternativas de preprocesamiento propuestas presentan rendimientos significativamente distintos en términos estadísticos. El análisis a posteriori, mediante el test de Nemenyi, permite identificar cuál es la arquitectura con mejor rendimiento. Los resultados de este test se muestran en la figura 5.5.

**Figura 5.5:** Representación gráfica de la comparación de las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en ACP.

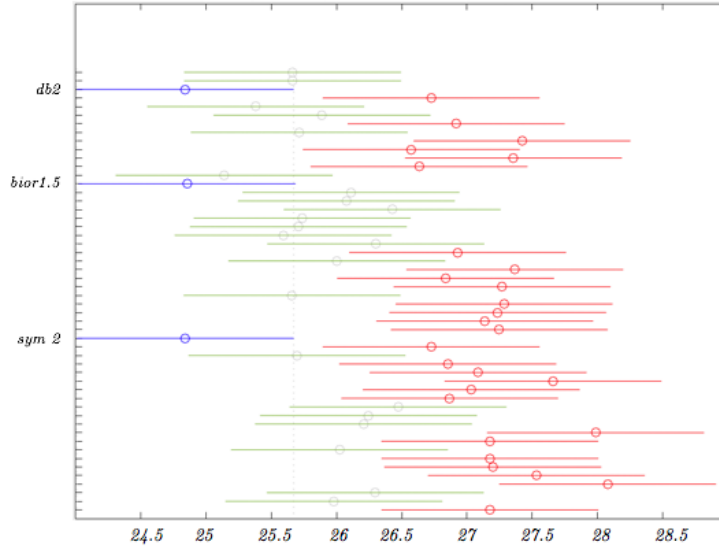
Como puede observarse en este análisis, la arquitectura basada en la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de nivel 3 ( $FFT(Det_3)$ ) es la que logra el mejor rendimiento, seguida por la arquitectura basada en la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de aproximación de nivel 2 ( $FFT(Ap_2)$ ).

Realizando un análisis análogo para tratar de encontrar la familia de wavelets que alcanza un mejor resultado, la tabla 5.6 muestra de nuevo diferencias estadísticamente significativas entre los rendimientos de las distintas subfamilias.

**Tabla 5.6:** Resultados del test de Friedman para el análisis de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre ACP.

$Q$	$k - 1$	$valor - p$
394.44	51	1.38 e-54

Sin embargo, el análisis a posteriori no encuentra una única subfamilia que obtenga un



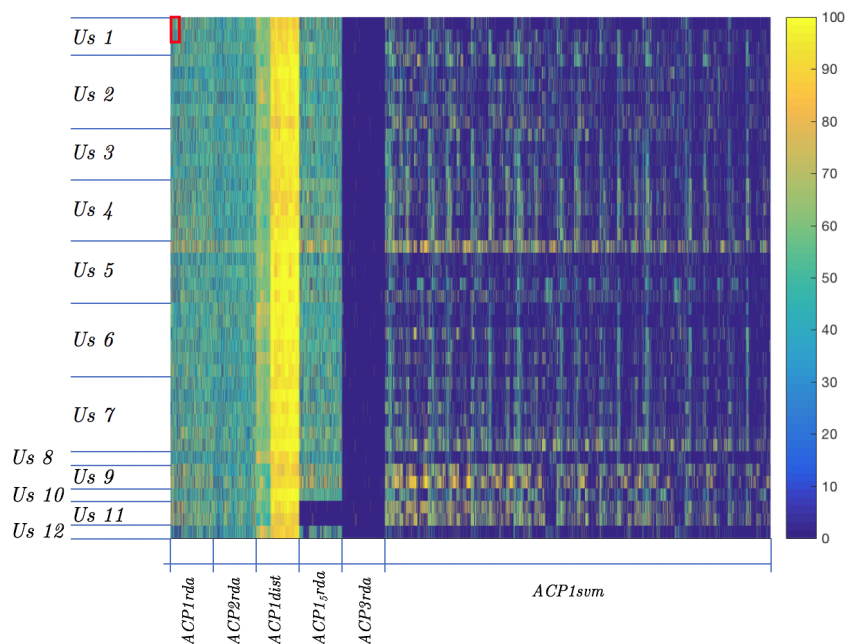
**Figura 5.6:** Representación gráfica de la comparación de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre *ACP*.

rendimiento destacado sobre las demás, tal y como indica la figura 5.6. En esta figura se comprueba que hay un subconjunto de hasta 25 subfamilias, en verde, encabezadas por las subfamilias *db2*, *bior1.5* y *sym2*, mostradas en azul, que obtienen resultados estadísticamente equivalentes.

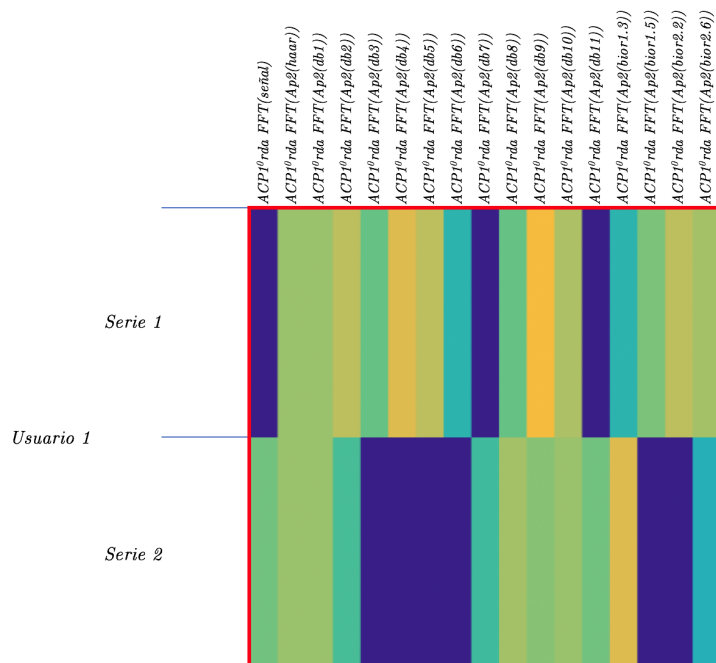
Una vez estudiados los resultados obtenidos para los métodos de preprocesamiento propuestos, corresponde estudiar en profundidad el rendimiento de las distintas variantes diseñadas para la extracción de características y la clasificación. En primer lugar, la figura 5.7 muestra una gráfica con las tasas de acierto alcanzadas por cada método para cada sesión y usuario. En el eje de abscisas se encuentran las 8778 variantes de las arquitecturas descritas y en el de ordenadas las 42 series grabadas agrupadas por el usuario a quien corresponden. La figura muestra, por tanto, las 368676 tasas de acierto obtenidas para el conjunto de series disponible, con el código de colores mostrado en la leyenda. Para comprender mejor el alcance de esta representación, la figura 5.8 muestra una ampliación del cuadro rojo marcado en la primera.

En un primer análisis, podrían destacarse las siguientes conclusiones iniciales:

- *ACP1dist* muestra resultados muy positivos para todas las sesiones. Haciendo un análisis un poco más detallado de su banda de resultados, el segundo y el tercer tercio de dicha banda, que corresponden con  $ACP1^{-1} dist$  y  $ACP1^{-2} dist$ , logran resultados por encima del 90% de acierto para todos los experimentos. Es decir, la extracción de características basada en la construcción de dos matrices especializadas con la clasificación por distancias entre vectores originales y recuperados sería el método más fiable independientemente del método de preprocesado.
- *ACP3rda*, arquitectura basada en la construcción de las cuatro matrices de caracte-



**Figura 5.7:** Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en ACP para todas las series grabadas.



**Figura 5.8:** Detalle de la representación gráfica de las tasas de acierto.

rísticas, especializadas y no especializadas, muestra los peores resultados.

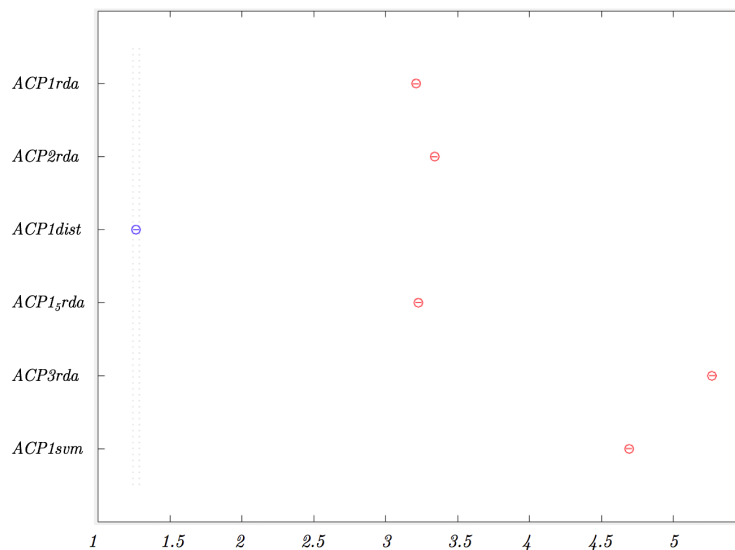
- El resto de propuestas obtienen resultados similares a primera vista.

Con el fin de confirmar estas conclusiones iniciales, se realiza el test de Friedman sobre estos resultados agrupados por arquitecturas con todas sus posibles parametrizaciones. Se confrontan, por tanto, todos los resultados obtenidos por todas las variantes de *ACP1rda* (independientemente de si se eliminan o no los autovectores más significativos, etc.) con todos los resultados generados por las variantes de *ACP2rda*, con todos los resultados alcanzados por las variantes de *ACP1dist*, *ACP1<sub>5</sub>rda*, *ACP3rda* y *ACP1svm*. El resultado del test, véase la tabla 5.7, indica inicialmente que queda descartada la hipótesis nula y, por tanto, hay diferencias estadísticamente significativas entre las diferentes arquitecturas globales propuestas.

**Tabla 5.7:** Resultados del test de Friedman para las tasas de acierto de las arquitecturas propuestas basadas en *ACP*.

$Q$	$k - 1$	valor - $p$
79843.85	5	0

Analizando a posteriori las estadísticas obtenidas por el test de Friedman mediante una comparación múltiple de todas las arquitecturas, figura 5.9, se confirma que hay una diferencia estadísticamente significativa entre algunos métodos, y puede concluirse, además, cuáles son las arquitecturas que mejor rendimiento alcanzan. Como anteriormente, este gráfico muestra que el mejor rendimiento es el logrado por *ACP1dist*. A pesar de que en la figura 5.7 no se observaba con claridad la diferencia entre algoritmos, las arquitecturas *ACP1<sup>X</sup>rda* y *ACP1<sub>5</sub><sup>X</sup>rda*, tienen un rendimiento significativamente mejor que el resto y son *ACP1svm* y *ACP3rda* las que peor comportamiento presentan.



**Figura 5.9:** Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en *ACP*.

Complementariamente, para tratar de analizar estos datos desde otra perspectiva, la tabla 5.8 muestra el tanto por ciento de tasas de acierto superiores al 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para cada método descrito y sus distintas parametrizaciones particulares. Para confeccionar esta tabla, se toman las tasas de acierto de cada alternativa,  $ACP1^0 rda$  por ejemplo, y se analiza el tanto por ciento de los resultados obtenidos para las 42 series grabadas y las distintas opciones de preprocesamiento que se encuentran por encima de los límites citados, 60 %, 70 %, 80 % y 90 %.

**Tabla 5.8:** % de tasas de acierto mejores del 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para las arquitecturas basadas en ACP.

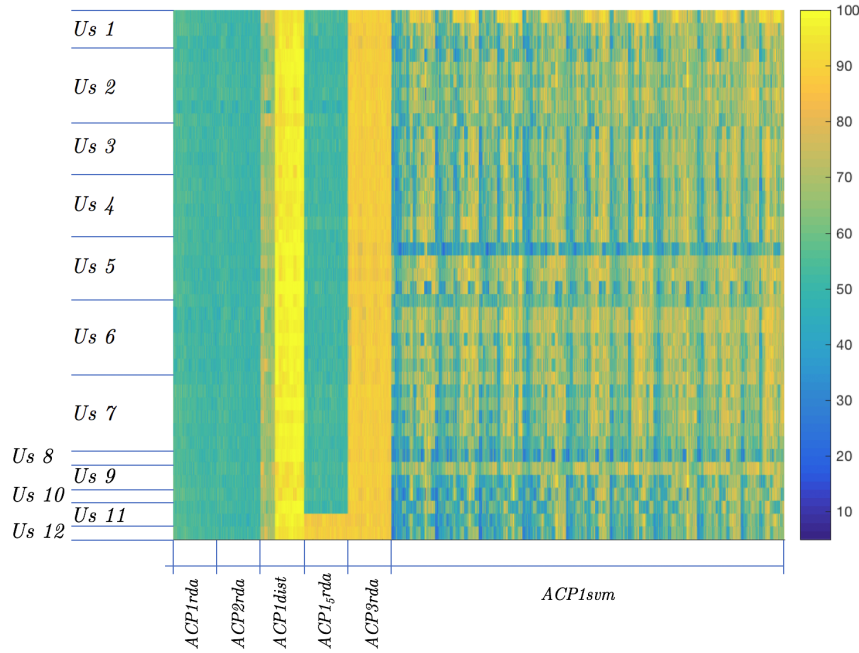
Algoritmo	> 60 %	> 70 %	> 80 %	> 90 %
$ACP1^0 rda$	<b>27.25</b>	9.35	1.66	0.03
$ACP1^{-1} rda$	<b>25.60</b>	7.61	1.09	0.07
$ACP1^{-2} rda$	<b>25.47</b>	6.74	0.64	0.01
$ACP2^0 rda$	16.94	3.63	0.40	0.00
$ACP2^{-1} rda$	17.78	4.20	0.44	0.03
$ACP2^{-2} rda$	19.54	4.34	0.59	0.02
$ACP1^0 dist$	<b>66.09</b>	<b>28.29</b>	5.82	0.23
$ACP1^{-1} dist$	<b>100.00</b>	<b>99.91</b>	<b>97.39</b>	<b>80.09</b>
$ACP1^{-2} dist$	<b>100.00</b>	<b>99.97</b>	<b>99.28</b>	<b>90.00</b>
$ACP1_{\frac{5}{5}}^0 rda$	<b>28.32</b>	10.14	2.10	0.23
$ACP1_{\frac{5}{5}}^{-1} rda$	<b>24.74</b>	7.37	1.16	0.13
$ACP1_{\frac{5}{5}}^{-2} rda$	<b>24.78</b>	6.50	0.74	0.02
$ACP3^0 rda$	0.49	0.27	0.17	0.06
$ACP3^{-1} rda$	0.18	0.10	0.06	0.02
$ACP3^{-2} rda$	0.09	0.06	0.03	0.00
$ACP1^0 svm$	16.08	6.47	1.63	0.25
$ACP1^{-1} svm$	11.27	3.99	0.59	0.03
$ACP1^{-2} svm$	7.67	2.68	0.42	0.02

Tal y como se extrae de la figura 5.7,  $ACP1^{-1} dist$  y  $ACP1^{-2} dist$  muestran una tasa de acierto significativamente superior al resto de arquitecturas. En la tabla se confirma, además, que los métodos  $ACP1^X rda$  y  $ACP1_{\frac{5}{5}}^X rda$  obtienen mejores resultados que  $ACP2^X rda$  y, por supuesto, que  $ACP3^X rda$ .

En este primer análisis, donde sorprende sin duda el rendimiento de uno de los métodos, se ha ignorado hasta ahora el estudio de las tasas de rechazo (tanto por ciento de señales clasificadas dentro de la clase de rechazo  $\omega_0$ ) de cada uno de los métodos. En la figura 5.10 se muestran gráficamente, de manera análoga a los resultados representados anteriormente, estas tasas de rechazo.

Destacan en esta gráfica:

- $ACP1 dist$  tiene una tasa de rechazo próxima al 100 %, predominantemente amarilla. Es decir, su precisión se basa en rechazar un altísimo tanto por ciento de las muestras, lo que supone una desventaja muy importante en caso de diseñar una BCI con esta arquitectura.
- $ACP3 rda$  presenta también altas tasas de rechazo, colora anaranjado, que confirman definitivamente su pobre rendimiento.



**Figura 5.10:** Representación gráfica de las tasas de rechazo generadas por las arquitecturas basadas en *ACP*.

- El resto de algoritmos generan rechazos similares, observándose en la gráfica una distribución de colores parecida.

En la tabla 5.9 puede observarse el % de tasas de rechazo superiores al 60 %, 70 %, 80 % y 90 % de cada una de las alternativas propuestas.

Con el fin de centrar el estudio en los algoritmos que generan tasas de rechazo que serían válidas para un sistema real, se evalúan a continuación estos resultados filtrados en función de su tasa de rechazo. Eliminando las parametrizaciones de los métodos que generan un rechazo superior al 75 %, forzando sus tasas de acierto a 0 % en la imagen, la representación gráfica de los resultados es la mostrada en la figura 5.11.

Como puede observarse en un primer análisis, todas las parametrizaciones de los algoritmos  $ACP1^{-1} dist$ ,  $ACP1^{-2} dist$  y  $ACP3rda$  quedan anuladas.

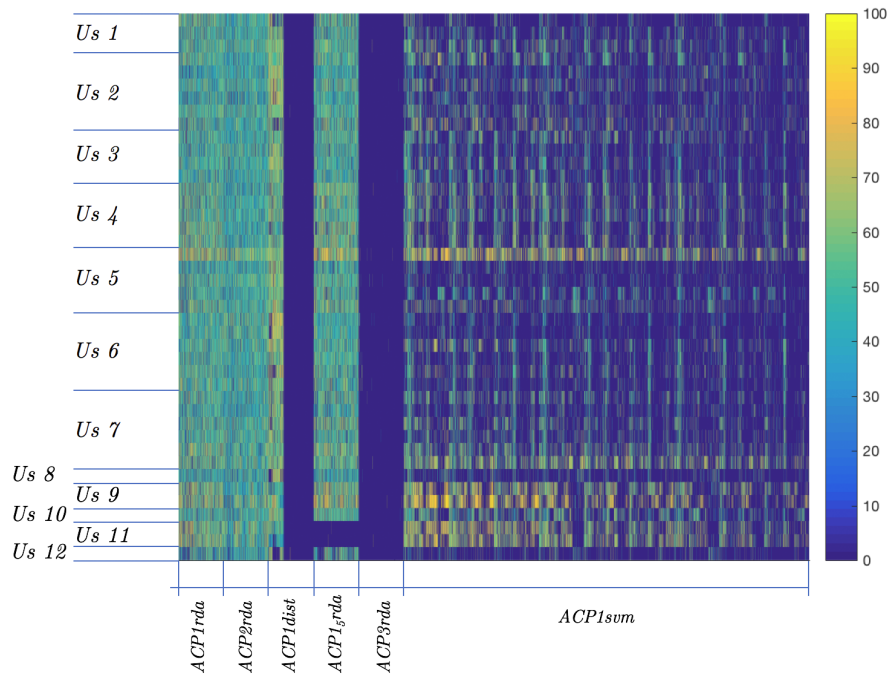
Procediendo con el análisis estadístico de los resultados filtrados por esta tasa de rechazo, sigue descartándose la hipótesis nula. En este caso, como puede comprobarse en la figura 5.12, son dos los métodos que mejor rendimiento obtienen,  $ACP1^X rda$  y  $ACP1_5^X rda$ , sin una diferencia estadísticamente significativa entre ellos.

De nuevo, se muestra el tanto por ciento de resultados superiores al 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para cada método descrito limitando el rechazo al 75 % (tabla 5.10).

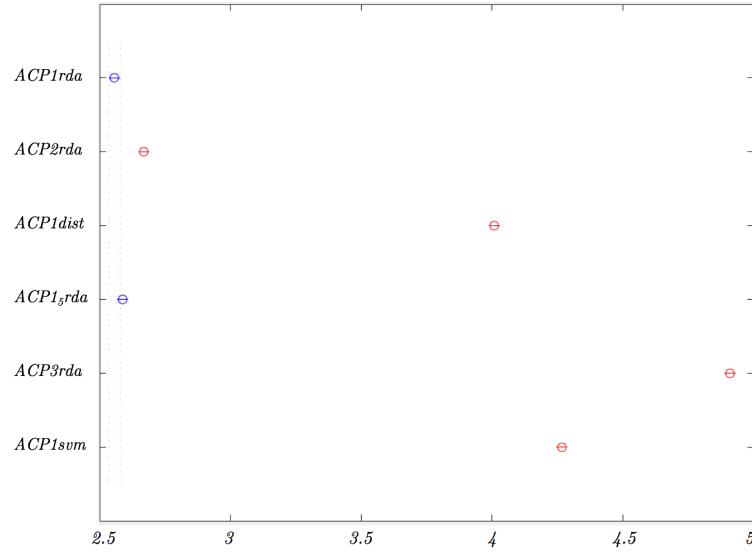
En la figura 5.13, se resume la comparación de los métodos basados en *ACP* suponiendo nulas las tasas de acierto de aquellos que generan un rechazo superior al 75 %, 50 %, 35 %, y 25 % respectivamente. Como puede observarse, el rendimiento de todas las arquitecturas se degrada rápidamente cuando se impone una tasa de rechazo menor. La importancia de

**Tabla 5.9:** % de tasas de rechazo superiores al 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para las arquitecturas basadas en *ACP*.

Algoritmo	> 60 %	> 70 %	> 80 %	> 90 %
ACP1 <sup>0</sup> rda	24.89	1.34	0.01	0.00
ACP1 <sup>-1</sup> rda	16.45	0.63	0.00	0.00
ACP1 <sup>-2</sup> rda	11.26	0.28	0.00	0.00
ACP2 <sup>0</sup> rda	17.20	0.64	0.00	0.00
ACP2 <sup>-1</sup> rda	10.82	0.38	0.00	0.00
ACP2 <sup>-2</sup> rda	8.60	0.08	0.00	0.00
ACP1 <sup>0</sup> dist	87.57	48.39	9.38	0.55
ACP1 <sup>-1</sup> dist	99.98	99.85	99.66	93.85
ACP1 <sup>-2</sup> dist	99.98	99.97	99.92	97.80
ACP1 <sub>5</sub> <sup>0</sup> rda	20.00	5.57	4.44	1.38
ACP1 <sub>5</sub> <sup>-1</sup> rda	18.71	5.29	4.58	1.94
ACP1 <sub>5</sub> <sup>-2</sup> rda	17.25	5.21	4.49	1.56
ACP3 <sup>0</sup> rda	99.85	99.27	91.80	36.25
ACP3 <sup>-1</sup> rda	100.00	99.95	95.67	39.96
ACP3 <sup>-2</sup> rda	100.00	99.97	96.30	38.65
ACP1 <sup>0</sup> svm	53.43	36.04	19.00	5.22
ACP1 <sup>-1</sup> svm	60.33	40.91	20.39	4.82
ACP1 <sup>-2</sup> svm	68.38	47.14	22.56	4.83

**Figura 5.11:** Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en *ACP* con tasa de rechazo menor de 75 %.



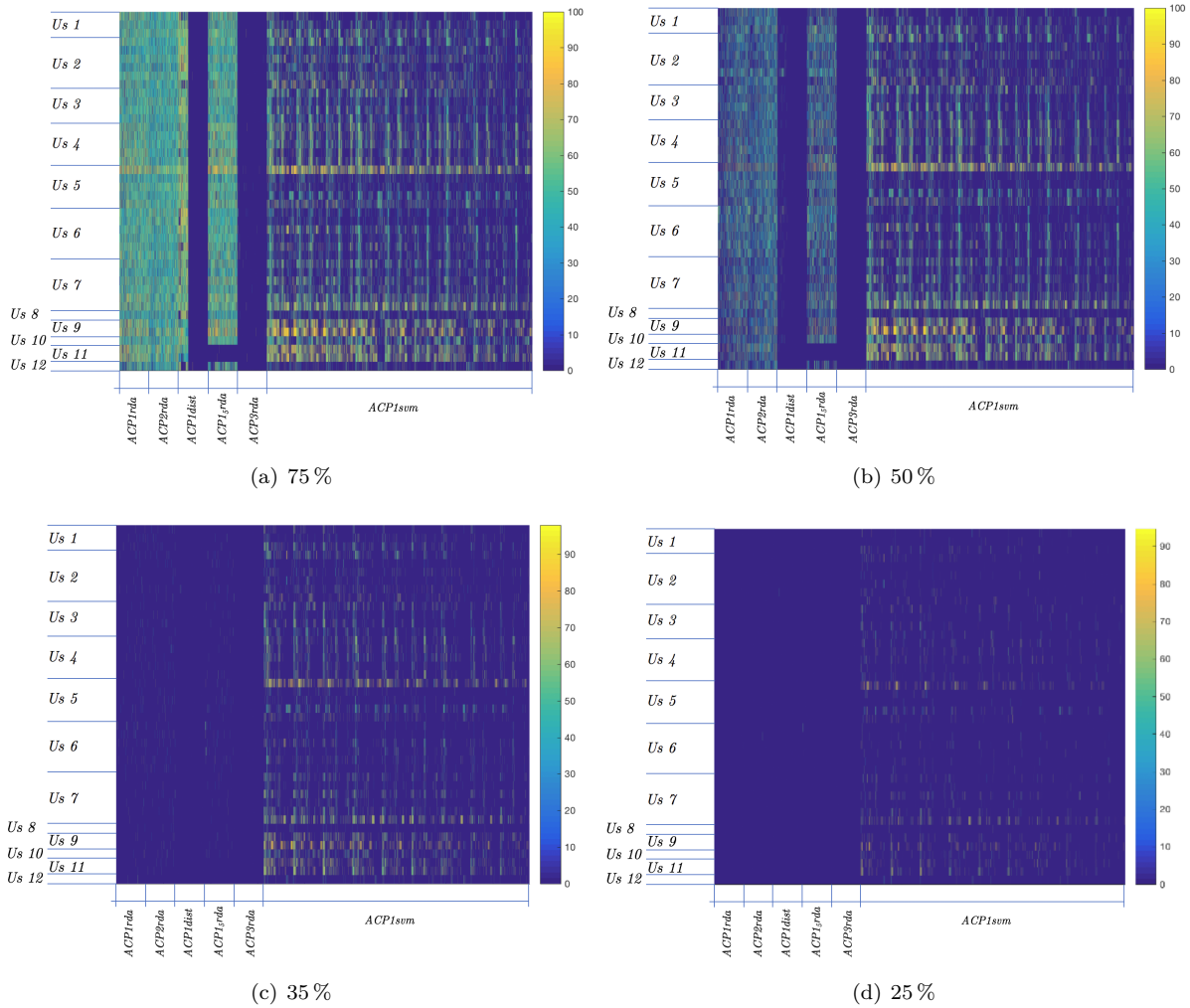


**Figura 5.12:** Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en *ACP* con tasas de rechazo menores de 75 %.

**Tabla 5.10:** % de tasas de acierto mejores del 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para las arquitecturas basadas en *ACP* con limitación de rechazo al 75 %.

Algoritmo	> 60 %	> 70 %	> 80 %	> 90 %
ACP1 <sup>0</sup> rda	27.25	9.35	1.66	0.03
ACP1 <sup>-1</sup> rda	25.60	7.61	1.09	0.07
ACP1 <sup>-2</sup> rda	25.47	6.74	0.64	0.01
ACP2 <sup>0</sup> rda	16.92	3.63	0.40	0.00
ACP2 <sup>-1</sup> rda	17.78	4.20	0.44	0.03
ACP2 <sup>-2</sup> rda	19.54	4.34	0.59	0.02
ACP1 <sup>0</sup> dist	48.12	16.46	1.83	0.02
ACP1 <sup>-1</sup> dist	0.03	0.03	0.02	0.00
ACP1 <sup>-2</sup> dist	0.00	0.00	0.00	0.00
ACP1 <sup>0</sup> <sub>5</sub> rda	28.26	10.08	2.05	0.21
ACP1 <sup>-1</sup> <sub>5</sub> rda	24.73	7.36	1.15	0.13
ACP1 <sup>-2</sup> <sub>5</sub> rda	24.77	6.50	0.74	0.02
ACP3 <sup>0</sup> rda	0.33	0.15	0.07	0.01
ACP3 <sup>-1</sup> rda	0.06	0.03	0.02	0.01
ACP3 <sup>-2</sup> rda	0.03	0.02	0.01	0.00
ACP1 <sup>0</sup> svm	16.07	6.46	1.62	0.25
ACP1 <sup>-1</sup> svm	11.27	3.98	0.59	0.03
ACP1 <sup>-2</sup> svm	7.66	2.67	0.42	0.02

esta tasa de rechazo será relevante en función del equipo real sobre el que se implemente la arquitectura de procesamiento puesto que, a mayor velocidad de procesamiento, mayor podrá ser la velocidad de muestreo y, por tanto, menos importancia tendrá el rechazo de algunas de las señales que se estén registrando. También dependerá de la aplicación final, puesto que no es igual de crítica la velocidad de respuesta de la BCI si se aplica al control de un ratón que al de una silla de ruedas.



**Figura 5.13:** Comparación de las arquitecturas basadas en ACP filtrando los resultados en función de su tasa de rechazo.

A la luz de los análisis realizados hasta este punto, no es fácil determinar si la exclusión del primer autovector, o del primero y el segundo, de la matriz de características, genera una mayor precisión en la clasificación. Parece que sí ocurre así para algunos métodos como  $ACP2^X rda$  y  $ACP1^X dist$ , pero no para el resto. Y tampoco se advierten diferencias importantes entre tomar 9 autovectores,  $ACP1^X rda$ , o tomar 5,  $ACP1_5^X rda$ , para la construcción de la matriz de características.

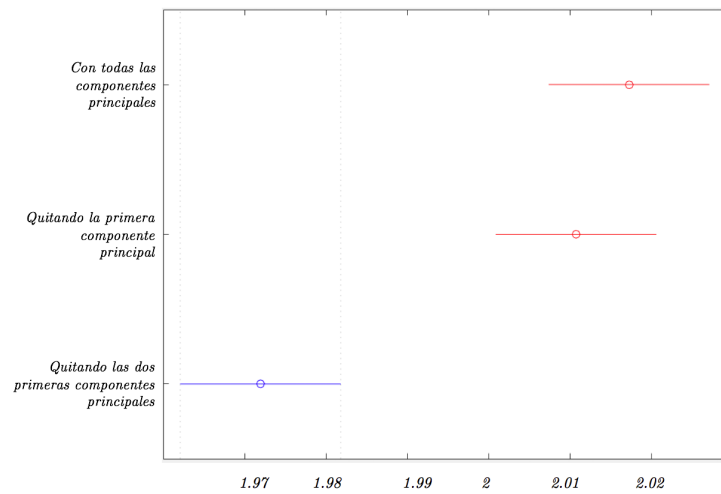
Para comprobar la primera hipótesis, se realiza el análisis estadístico descrito sobre los resultados obtenidos por los distintos métodos para las alternativas en las que se conservan todas las componentes principales, se elimina la más relevante y en las que se eliminan las

dos componentes con mayor autovalor asociado. El estudio indica en primer lugar, como muestra la tabla 5.11, que hay diferencias significativas entre las distintas opciones.

**Tabla 5.11:** Resultados del test de Friedman para el estudio de la eliminación de las primeras componentes principales en la construcción de la matriz de características.

$Q$	$k - 1$	$\text{valor} - p$
33.79	2	4.58 e-08

Como se muestra en la figura 5.14, la última alternativa, prescindir de los dos autovectores más significativos para la construcción de las matrices de características, es la mejor de las tres.



**Figura 5.14:** Representación gráfica de la comparación de la eliminación de las primeras componentes principales en la construcción de la matriz de características.

Finalmente, el estudio y comparación de los métodos  $ACP1^X rda$ , que utilizan 9 componentes principales, y  $ACP1_5^X rda$  que utilizan 5, no arroja conclusiones significativas que permitan elegir inequívocamente una de las dos alternativas. De acuerdo a la tabla 5.12, prevalece la hipótesis nula y, por tanto, sus rendimientos son equivalentes como muestra el  $\text{valor} - p$ .

**Tabla 5.12:** Resultados del test de Friedman para la comparación entre las matrices de características construidas a partir de 9 o 5 componentes principales.

$Q$	$k - 1$	$\text{valor} - p$
0.01	1	0.904

#### 5.5.4. Conclusiones y aportaciones

Después del estudio pormenorizado de los sistemas diseñados sobre los algoritmos  $ACP$  y del análisis estadístico realizado para comparar las diversas alternativas planteadas, la propuesta final de arquitectura completa para el diseño de una BCI sobre estos algoritmos sería:

- Preprocesamiento mediante la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de tercer nivel. Si bien no se han observado diferencias estadísticamente significativas entre las diferentes subfamilias de wavelets, la propuesta sería utilizar aquellas que han obtenido mejor clasificación en el test de Nemenyi: *db2*, *bior1.5* y *sym2*.
- Extracción de características y clasificación mediante  $ACP1_{\frac{1}{5}}^{-2} rda$  o bien  $ACP1^{-2} rda$ , que obtienen un buen rendimiento con una tasa de rechazo aceptable. La primera tendría la ventaja de generar matrices de características más reducidas, pero no se ha probado que su rendimiento sea mejor. Se descarta el uso de  $ACP1^{-2} dist$  por presentar tasas de rechazo que no permiten su uso en una interfaz en tiempo real.

## 5.6. Arquitecturas basadas en MCP

### 5.6.1. Descripción de las arquitecturas analizadas

#### 5.6.1.1. Preprocesamiento

La fase de preprocesamiento es idéntica a la descrita en 5.4 y se evalúan también en este apartado todas las arquitecturas propuestas.

#### 5.6.1.2. Extracción y selección de características

En todas las arquitecturas estudiadas en este apartado, se toma como base para realizar la extracción y selección de características el análisis por mínimos cuadrados parciales presentado en el apartado 3.4. El esquema general evaluado en los experimentos es el propuesto en 3.4.2. Como se explica en detalle en dicho apartado, la propia naturaleza del algoritmo *MCP* simplifica la arquitectura de extracción y selección de características al tener en cuenta la clase a la que pertenecen los datos en el proceso de construcción de las componentes latentes y permite encadenar las señales preprocesadas de ambos electrodos para construir una matriz de características única. De alguna forma, como se ha explicado en detalle anteriormente, se puede decir que estas componentes o variables latentes representan las características comunes o relevantes de los datos y las clases a las que estos pertenecen.

En los experimentos realizados, se ha evaluado esta fase de extracción de características utilizando el algoritmo *MCP* y su versión robusta *MCPR*, con 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 componentes latentes.

#### 5.6.1.3. Clasificación

En las arquitecturas propuestas sobre el algoritmo *MCP* y *MCPR*, el clasificador utilizado es el descrito en 4.2.3. Con el fin de optimizar la parametrización de la arquitectura

diseñada, se han evaluado distintas alternativas en los límites propuestos para la clase de rechazo en la ecuación 4.30:

- Sin rechazo:

$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } \hat{y}_z \leq 0,5 \\ \omega_2, & \text{si } \hat{y}_z > 0,5 \end{cases} \quad (5.10)$$

- Con rango reducido de rechazo:

$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } \hat{y}_z \leq 0,4 \\ \omega_2, & \text{si } \hat{y}_z \geq 0,6 \\ \omega_0, & \text{si } 0,4 < \hat{y}_z < 0,6 \end{cases} \quad (5.11)$$

- Con un rango amplio de rechazo:

$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } \hat{y}_z \leq 0,25 \\ \omega_2, & \text{si } \hat{y}_z \geq 0,75 \\ \omega_0, & \text{si } 0,25 < \hat{y}_z < 0,75 \end{cases} \quad (5.12)$$

### 5.6.2. Resumen de arquitecturas analizadas

Las arquitecturas basadas en estos algoritmos son:

- *MCPnoRech*:
  - Preprocesamiento según 5.4: *FFT*, *Ap2(52Wvs)*, *Det1(52Wvs)*, *Det2(52Wvs)* o *Det3(52Wvs)*.
  - Obtención de las componentes latentes mediante *MCP* utilizando para la clasificación:
    - *MCPnoRech*<sup>6</sup>: 6 variables latentes.
    - *MCPnoRech*<sup>7</sup>: 7 variables latentes.
    - *MCPnoRech*<sup>8</sup>: 8 variables latentes.
    - *MCPnoRech*<sup>9</sup>: 9 variables latentes.
    - *MCPnoRech*<sup>10</sup>: 10 variables latentes.
    - *MCPnoRech*<sup>11</sup>: 11 variables latentes.
    - *MCPnoRech*<sup>12</sup>: 12 variables latentes.
  - Clasificación por regresión lineal sobre las componentes latentes sin rechazo.
  - Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 7 arquitecturas de clasificación dependiendo de si se utilizan 6, 7, 8, 9, 10, 11 o 12 variables latentes → 1463 variantes.

■ *MCPRech1*:

- Preprocesamiento según 5.4: *FFT*, *Ap2(52Wvs)*, *Det1(52Wvs)*, *Det2(52Wvs)* o *Det3(52Wvs)*.
- Obtención de las componentes latentes mediante *MCP* utilizando para la clasificación:
  - *MCPRech1*<sup>6</sup>: 6 variables latentes.
  - *MCPRech1*<sup>7</sup>: 7 variables latentes.
  - *MCPRech1*<sup>8</sup>: 8 variables latentes.
  - *MCPRech1*<sup>9</sup>: 9 variables latentes.
  - *MCPRech1*<sup>10</sup>: 10 variables latentes.
  - *MCPRech1*<sup>11</sup>: 11 variables latentes.
  - *MCPRech1*<sup>12</sup>: 12 variables latentes.
- Clasificación por regresión lineal sobre las componentes latentes con rango amplio de rechazo.
- Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 7 arquitecturas de clasificación dependiendo de si se utilizan 6, 7, 8, 9, 10, 11 o 12 variables latentes → 1463 variantes.

■ *MCPRech2*:

- Preprocesamiento según 5.4: *FFT*, *Ap2(52Wvs)*, *Det1(52Wvs)*, *Det2(52Wvs)* o *Det3(52Wvs)*.
- Obtención de las componentes latentes mediante *MCP* utilizando para la clasificación:
  - *MCPRech2*<sup>6</sup>: 6 variables latentes.
  - *MCPRech2*<sup>7</sup>: 7 variables latentes.
  - *MCPRech2*<sup>8</sup>: 8 variables latentes.
  - *MCPRech2*<sup>9</sup>: 9 variables latentes.
  - *MCPRech2*<sup>10</sup>: 10 variables latentes.
  - *MCPRech2*<sup>11</sup>: 11 variables latentes.
  - *MCPRech2*<sup>12</sup>: 12 variables latentes.
- Clasificación por regresión lineal sobre las componentes latentes con rango de rechazo reducido.
- Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 7 arquitecturas de clasificación dependiendo de si se utilizan 6, 7, 8, 9, 10, 11 o 12 variables latentes → 1463 variantes.

■ *MCPRob*:

- Preprocesamiento según 5.4: *FFT*, *Ap2(52Wvs)*, *Det1(52Wvs)*, *Det2(52Wvs)* o *Det3(52Wvs)*.
- Obtención de las componentes latentes mediante *MCP* robusto utilizando para la clasificación:
  - *MCPRob*<sup>6</sup>: 6 variables latentes.
  - *MCPRob*<sup>7</sup>: 7 variables latentes.
  - *MCPRob*<sup>8</sup>: 8 variables latentes.
  - *MCPRob*<sup>9</sup>: 9 variables latentes.
  - *MCPRob*<sup>10</sup>: 10 variables latentes.
  - *MCPRob*<sup>11</sup>: 11 variables latentes.
  - *MCPRob*<sup>12</sup>: 12 variables latentes.
- Clasificación por regresión lineal sobre las componentes latentes con rango de rechazo amplio.
- Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 7 arquitecturas de clasificación dependiendo de si se utilizan 6, 7, 8, 9, 10, 11 o 12 variables latentes → 1463 variantes.

En total, se están sometiendo a análisis 5852 variantes de la arquitectura genérica basada en *MCP*.

### 5.6.3. Resultados

De manera análoga a los resultados presentados para las arquitecturas basadas en *ACP*, se presenta en primer lugar el estudio de las técnicas de preprocesamiento cuando se realiza la extracción de características y la clasificación sobre los algoritmos *MCP* y *MCPR*. El objetivo es, de nuevo, comprobar si hay alguna diferencia significativa entre el uso de los diferentes métodos de preprocesamiento propuestos, es decir, entre la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de aproximación de nivel 2, y los coeficientes wavelet de detalle de niveles 1, 2 y 3, y si estas conclusiones corroboran las extraídas para las arquitecturas *ACP*.

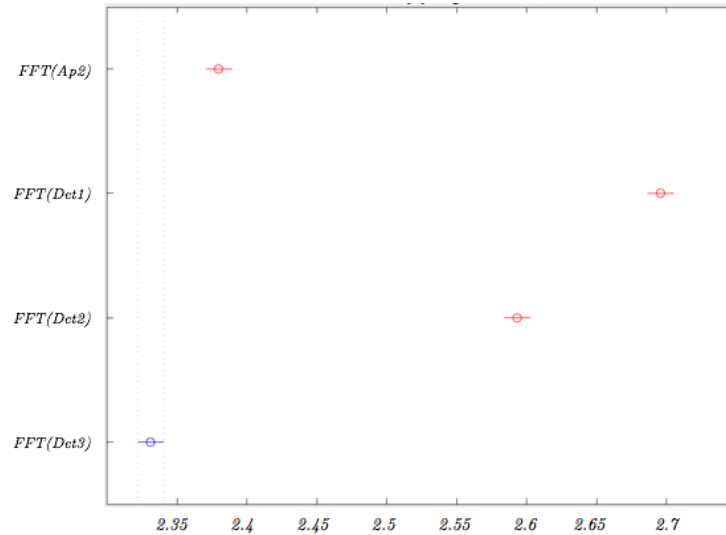
Para ello, se evalúan los resultados agrupados en función del método de preprocesado elegido mediante el test de Friedman, obteniendo los resultados mostrados en la tabla 5.13.

**Tabla 5.13:** Resultados del test de Friedman para las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en *MCP*.

$Q$	$k - 1$	$valor - p$
3325.28	3	0

También para estas arquitecturas es posible rechazar la hipótesis nula, que establece que no hay diferencias significativas entre los distintos métodos de preprocesamiento, por

lo que se procede con el análisis a posteriori cuyos resultados se muestran en la figura 5.15 y coinciden con lo concluido en el apartado anterior. La arquitectura basada en la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de nivel 3 ( $FFT(Det_3)$ ) es la que logra el mejor rendimiento, seguida por la arquitectura basada en la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de aproximación de nivel 2 ( $FFT(Ap_2)$ ).



**Figura 5.15:** Representación gráfica de la comparación de las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en *MCP*.

Comprobado el rendimiento de las técnicas de preprocesamiento, se muestran a continuación las conclusiones del análisis estadístico por subfamilias de wavelets. La tabla 5.14 señala diferencias significativas entre los rendimientos de las distintas subfamilias.

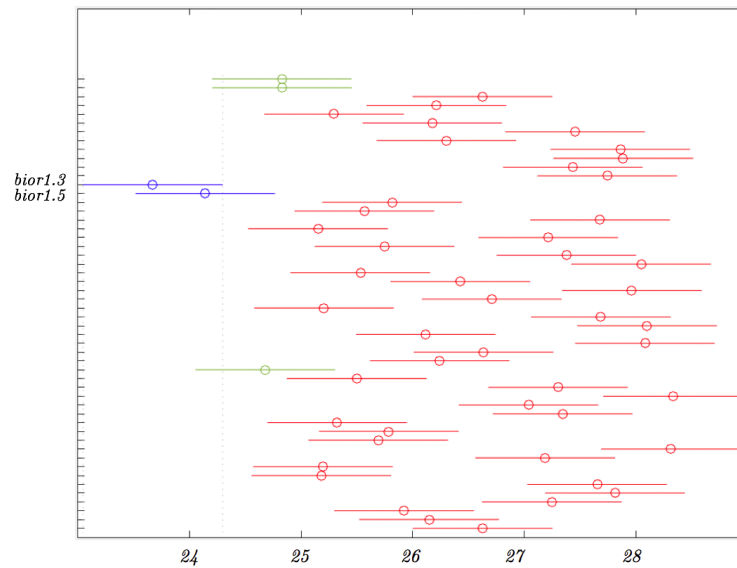
**Tabla 5.14:** Resultados del test de Friedman para el análisis de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre *MCP*.

$Q$	$k - 1$	$valor - p$
1464.97	51	0

Al contrario que en el caso de las arquitecturas basadas en ACP, el análisis a posteriori sí encuentra dos subfamilias con un rendimiento destacado sobre las demás para esta arquitectura propuesta. Son las subfamilias *bior1.3* y *bior1.5* las que, mostradas en azul en la figura 5.16, están a un estrecho margen de superar la distancia crítica del test de Nemenyi respecto a las dos subfamilias siguientes, *haar* y *db2*, en verde en dicha gráfica. Dado que no se respeta esta distancia de manera absoluta, no se puede afirmar que este resultado sea estrictamente significativo, pero sí es destacado.

Para realizar un primer estudio de las tasas de acierto de las distintas arquitecturas alternativas planteadas sobre los algoritmos *MCP* y *MCPR*, se muestran estos resultados de manera gráfica en la figura 5.17. Como en el apartado anterior, el eje de abscisas indica las 5852 variantes a evaluar y el eje de coordenadas las 42 series de señales grabadas por los sujetos voluntarios del estudio. La figura muestra, por tanto, los 254784 resultados





**Figura 5.16:** Representación gráfica de la comparación de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre *MCP*.

obtenidos.

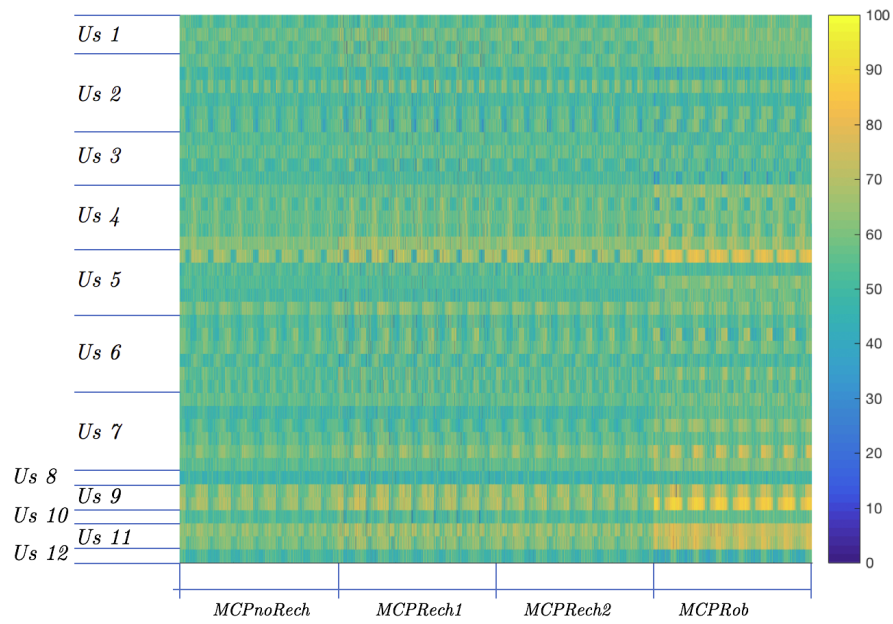
Un primer análisis visual de esta gráfica permite observar tan solo una cierta mejoría, mayor presencia del color amarillo, en el rendimiento de *MCPRech1* y *MCPRech2* sobre *MCPNoRech* y de *MCPRob* sobre el resto. Se advierte también, de manera más clara en este caso, como algunos usuarios presentan mejores resultados, bandas horizontales predominantemente amarillas para todos los métodos y, por tanto, mayor destreza en el manejo del sistema.

Con el fin de hacer un análisis exhaustivo de los rendimientos de cada una de las arquitecturas propuestas, se realiza el test de Friedman sobre las tasas de acierto agrupadas por arquitectura. El resultado del test (véase la tabla 5.15) indica, una vez más, que queda descartada la hipótesis nula y, por tanto, hay diferencias estadísticamente significativas entre las diferentes alternativas diseñadas.

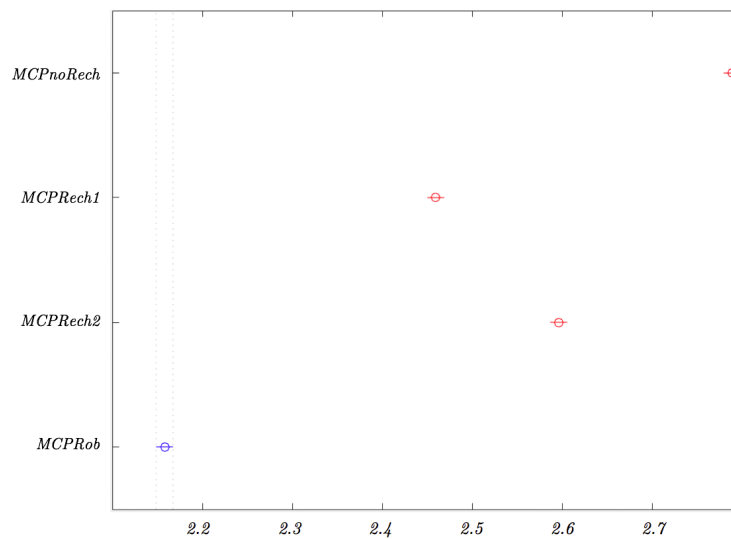
**Tabla 5.15:** Resultados del test de Friedman para las tasas de acierto de las arquitecturas propuestas basadas en *MCP*.

$Q$	$k - 1$	valor - $p$
7858.74	3	0

Una vez constatada la significancia estadística de las diferencias entre los rendimientos de las distintas arquitecturas, se puede confirmar cuál de ellas obtiene un mejor resultado mediante el test de Nemenyi cuyos resultados se muestra en la figura 5.18. Esta prueba indica, sin lugar a dudas, que el mejor método es *MCPRob*, basado en el algoritmo MCP robusto, seguido por *MCPRech1*, arquitectura sobre MCP con margen de rechazo reducido, *MCPRech1* con un margen de rechazo más amplio y, finalmente, la arquitectura sin rechazo *MCPNoRech*.



**Figura 5.17:** Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en *MCP*.



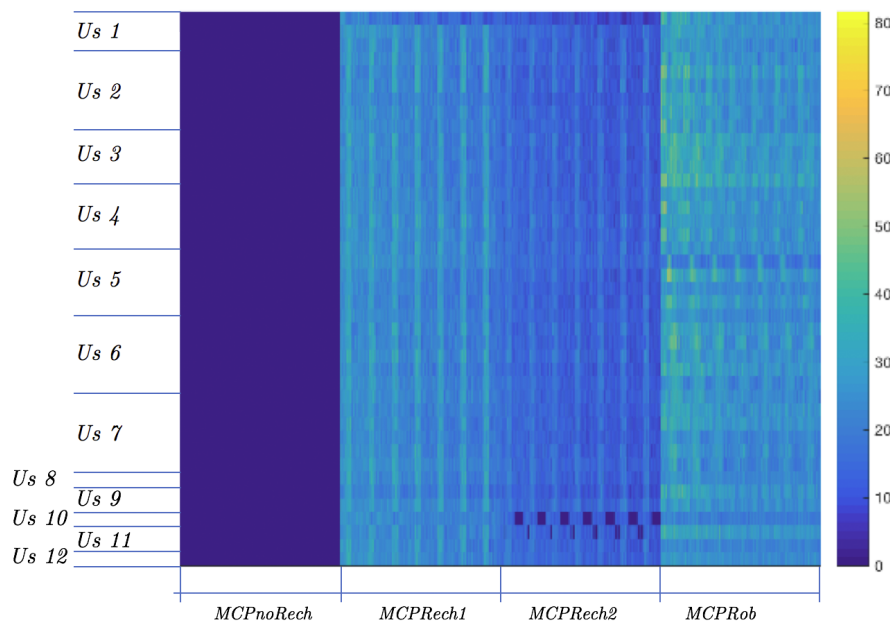
**Figura 5.18:** Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en *MCP*.

Como en el apartado anterior, en la tabla 5.16 se muestra el tanto por ciento de tasas de acierto superiores al 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para cada método descrito y sus distintas parametrizaciones particulares. Tomadas las tasas de acierto de cada alternativa con sus distintas parametrizaciones, se calcula el tanto por ciento de los resultados obtenidos que se encuentran por encima de los límites citados, 60 %, 70 %, 80 % y 90 %. Los números reflejan también las conclusiones extraídas anteriormente.

**Tabla 5.16:** % de resultados mejores del 60 %, 70 %, 80 % y 90 % para las arquitecturas basadas en *MCP*.

Algoritmo	> 60 %	> 70 %	> 80 %	> 90 %
<i>MCPnoRech</i>	31.34	6.23	0.36	0.00
<i>MCPRech1</i>	34.74	11.52	1.94	0.10
<i>MCPRech2</i>	32.70	8.73	0.97	0.02
<i>MCPRob</i>	44.39	15.48	3.77	0.38

En la figura 5.19, se representan las tasas de rechazo generadas por estas arquitecturas para verificar la viabilidad de su inclusión en una BCI.



**Figura 5.19:** Representación gráfica de las tasas de rechazo generadas por las arquitecturas basadas en *MCP*.

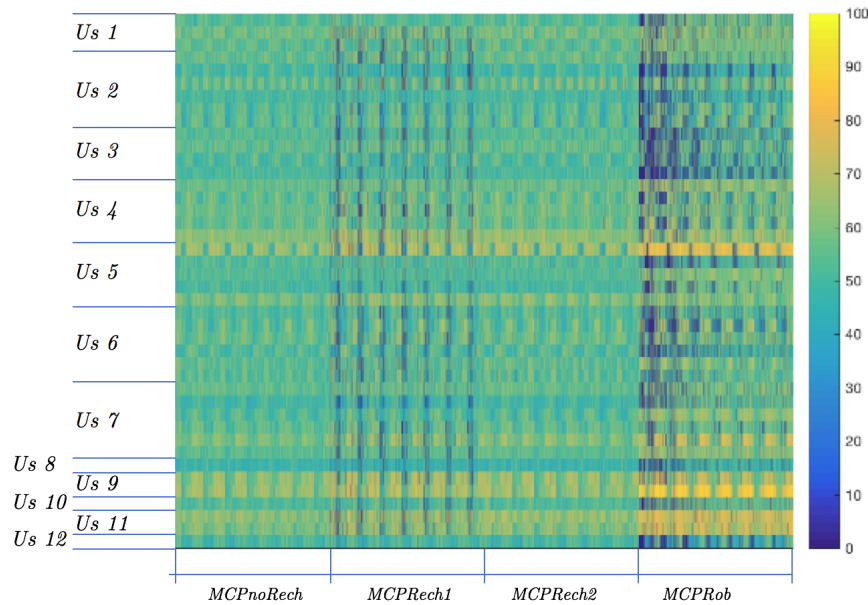
La predominancia del color azul de la gráfica sugiere que los rechazos son bajos en todas las arquitecturas. La primera parte de la gráfica corresponde con los resultados de la propuesta *MCPNoRech*, sin rechazo, por lo que evidentemente todos los niveles son 0 %. Para el resto de las arquitecturas, la tabla 5.17 muestra el tanto por ciento de parametrizaciones concretas de cada arquitectura que generan rechazos superiores al 30 %, 40 %, 50 % y 60 %. Como puede observarse, los datos contenidos en esta tabla reflejan las bajas tasas de rechazo generadas por estas alternativas incluso en el caso de la arquitectura con un margen de rechazo más amplio, *MCPRech1* (nótese que los rechazos de la tabla

equivalente para las arquitecturas basadas en *ACP* eran 60 %, 70 %, 80 % y 90 %).

**Tabla 5.17:** % de tasas de rechazo superiores al 30 %, 40 %, 50 % y 60 % para las arquitecturas basadas en *MCP*.

Algoritmo	> 30 %	> 40 %	> 50 %	> 60 %
<i>MCPRech1</i>	21.31	3.33	0.23	0.01
<i>MCPRech2</i>	1.14	0.01	0.00	0.00
<i>MCPRob</i>	34.84	7.35	1.24	0.14

Para observar la degradación que supone la limitación del rechazo en las arquitecturas con mejor rendimiento, se analizan a continuación las distintas arquitecturas anulando las parametrizaciones de los métodos que generan un rechazo superior al 35 %. La representación gráfica de los resultados es la mostrada en la figura 5.20.

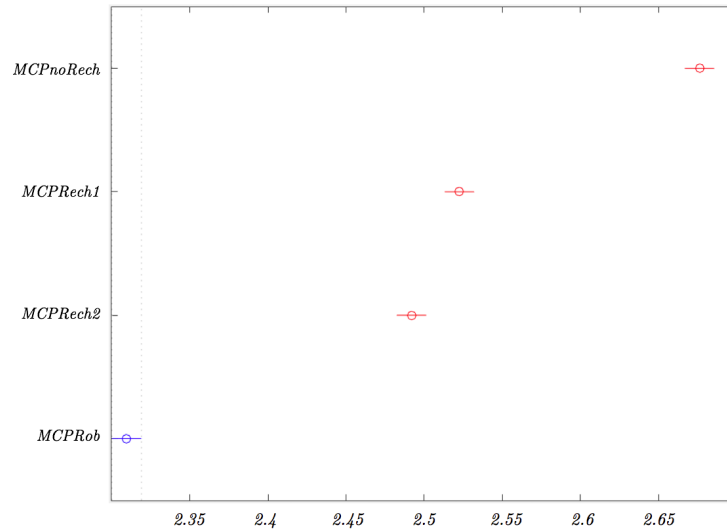


**Figura 5.20:** Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en *MCP* con tasa de rechazo menor de 35 %.

Realizando el análisis estadístico de las tasas de acierto habiendo eliminado las parametrizaciones que generan rechazos superiores al 35 %, se demuestra que existen de nuevo diferencias significativas entre los rendimientos de las arquitecturas propuestas. La figura 5.21 refleja estos resultados.

Al limitar el rechazo, se observa la degradación de las tasas de acierto del método con rango de rechazo más amplio, *MCPRech1*, pero sin perjuicio para *MCPRob*, que sigue siendo la arquitectura con mejor rendimiento.

Confirmado este resultado, se muestra a continuación la comparación de las distintas parametrizaciones propuestas en función del número de componentes latentes utilizadas. El objetivo es estudiar la relevancia del número de componentes seleccionadas y averiguar si existe una parametrización óptima. Para ello, una vez más, se realiza el test de Friedman sobre las tasas de acierto obtenidas en los experimentos para las distintas parametrizaciones de las arquitecturas propuestas basadas en los algoritmos MCP, cuyos resultados se



**Figura 5.21:** Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en *MCP* con tasas de rechazo menores de 35%.

muestran en la tabla 5.18 y evidencian de nuevo la relevancia estadística de la diferencia de rendimientos entre las distintas alternativas.

**Tabla 5.18:** Resultados del test de Friedman para el estudio del número de variables latentes seleccionadas en las arquitecturas basadas en *MCP*.

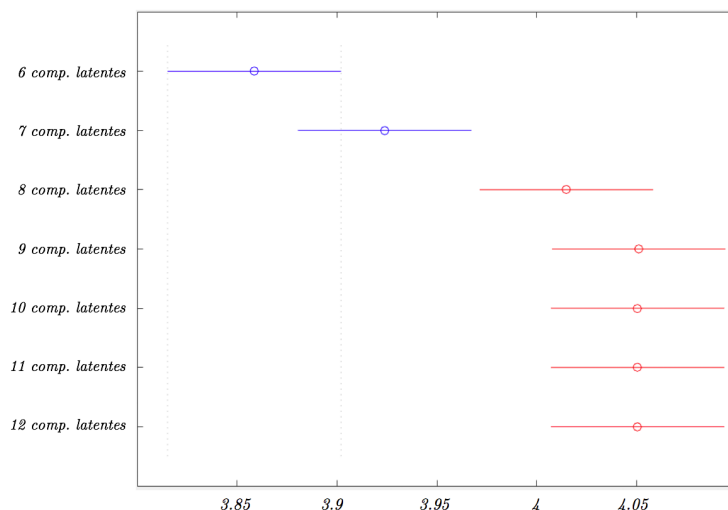
$Q$	$k - 1$	$valor - p$
83.57	6	0

La figura 5.22 refleja los resultados del test realizado a posteriori, que determina que las mejores alternativas son las que utilizan 6 y 7 variables latentes.

#### 5.6.4. Conclusiones y aportaciones

Terminado el estudio comparativo de los sistemas diseñados sobre los algoritmos *MCP* y de sus distintas parametrizaciones, la propuesta final de arquitectura completa para el diseño de una BCI sobre estos algoritmos sería:

- Preprocesamiento, al igual que en el caso de *ACP*, mediante la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de tercer nivel haciendo uso de las subfamilias de wavelets *bior1.3* o *bior1.5*.
- Extracción de características y clasificación mediante *MCPRob*, que obtiene el mejor rendimiento para todos los estudios realizados, utilizando 6 o 7 componentes latentes.



**Figura 5.22:** Estudio del número de variables latentes seleccionadas en las arquitecturas basadas en *MCP*.

## 5.7. Arquitecturas basadas en SVM

### 5.7.1. Descripción de las arquitecturas analizadas

#### 5.7.1.1. Preprocesamiento

La fase de preprocesamiento es idéntica, también en este caso, a la descrita en 5.4, evaluándose también en estos experimentos todas las arquitecturas allí citadas.

#### 5.7.1.2. Extracción y selección de características

En los experimentos detallados en este apartado, las arquitecturas propuestas no incorporan ningún método de extracción de características más allá de los detallados en la fase de preprocesamiento. Se simplifica de esta manera la arquitectura global y se evalúa la capacidad de las máquinas de vectores soporte en estas condiciones.

#### 5.7.1.3. Clasificación

El método de clasificación evaluado en estos experimentos es, evidentemente, las máquinas de vectores soporte, analizando las siguientes alternativas:

1. Núcleo RBF.
2. Distintas parametrizaciones del factor de coste,  $c$ :
  - 100.
  - 1000.
  - 10000.

3. Distintas parametrizaciones del valor de  $\gamma$ :

- 0,07.
- 0,01.
- 0,001.

4. En cuanto al rechazo:

- Sin rechazo:

$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } y_z = 1 \\ \omega_2, & \text{si } y_z = -1 \\ \omega_0, & \text{resto} \end{cases} \quad (5.13)$$

- Con rango reducido de rechazo,  $prob_{min} = 0,51$ :

$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } y_z = 1 & \text{con } prob_{est} > prob_{min} \\ \omega_2, & \text{si } y_z = -1 & \text{con } prob_{est} > prob_{min} \\ \omega_0, & \text{resto} \end{cases} \quad (5.14)$$

- Con un rango amplio de rechazo,  $prob_{min} = 0,55$ :

$$clase = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } y_z = 1 & \text{con } prob_{est} > prob_{min} \\ \omega_2, & \text{si } y_z = -1 & \text{con } prob_{est} > prob_{min} \\ \omega_0, & \text{resto} \end{cases} \quad (5.15)$$

### 5.7.2. Resumen de arquitecturas analizadas

Las arquitecturas propuestas basadas en SVM son:

- $SVMnoRech_c^\gamma$ :
  - Preprocesamiento según 5.4:  $FFT$ ,  $Ap2(52Wvs)$ ,  $Det1(52Wvs)$ ,  $Det2(52Wvs)$  o  $Det3(52Wvs)$ .
  - Clasificación sin rechazo mediante máquinas de vectores soporte con núcleo de base radial y parametrizaciones:
    - $\gamma = 0,07, 0,01$  o  $0,001$ .
    - $c = 100, 1000$  o  $10000$ .
  - Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 3 parametrizaciones de  $\gamma$  \* 3 parametrizaciones de  $c \rightarrow 1881$  variantes.
- $SVMRech1_c^\gamma$ :
  - Preprocesamiento según 5.4:  $FFT$ ,  $Ap2(52Wvs)$ ,  $Det1(52Wvs)$ ,  $Det2(52Wvs)$  o  $Det3(52Wvs)$ .

- Clasificación con intervalo amplio de rechazo mediante máquinas de vectores soporte con núcleo de base radial y parametrizaciones:
    - $\gamma = 0,07, 0,01$  o  $0,001$ .
    - $c = 100, 1000$  o  $10000$ .
  - Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 3 parametrizaciones de  $\gamma$  \* 3 parametrizaciones de  $c \rightarrow 1881$  variantes
- *SVMRech2 $\gamma$* :
- Preprocesamiento según 5.4: *FFT*, *Ap2(52Wvs)*, *Det1(52Wvs)*, *Det2(52Wvs)* o *Det3(52Wvs)*
  - Clasificación con intervalo reducido de rechazo mediante máquinas de vectores soporte con núcleo de base radial y parametrizaciones:
    - $\gamma = 0,07, 0,01$  o  $0,001$ .
    - $c = 100, 1000$  o  $10000$ .
  - Número de variantes a evaluar: 209 alternativas de preprocesamiento \* 3 parametrizaciones de  $\gamma$  \* 3 parametrizaciones de  $c \rightarrow 1881$  variantes

En total, se están sometiendo a análisis 5643 variantes de la arquitectura genérica basada en *SVM*.

### 5.7.3. Resultados

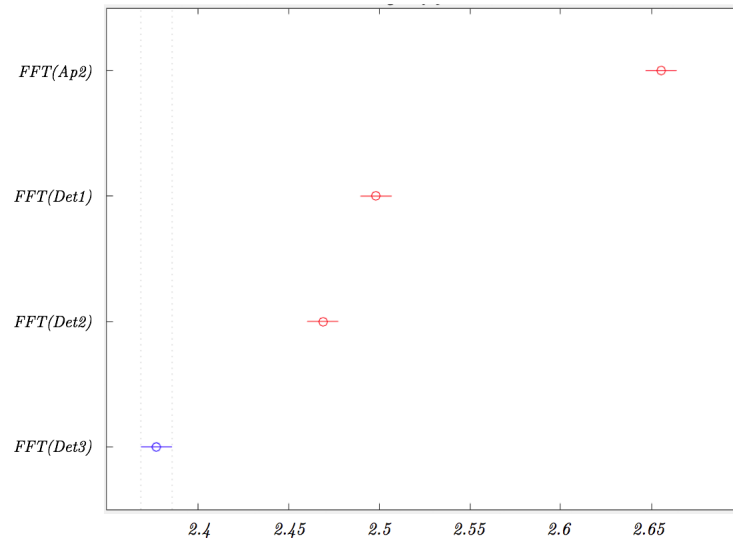
Tal y como se ha mostrado para las arquitecturas basadas en *ACP* y *MCP*, se presenta a continuación en primer lugar el estudio de las técnicas de preprocesamiento cuando se realiza la extracción de características y la clasificación mediante máquinas de soporte vectorial. Agrupadas las tasas de acierto en función del método de preprocesado elegido, se realiza el análisis en primer lugar mediante el test de Friedman obteniendo los resultados mostrados en la tabla 5.19.

**Tabla 5.19:** Resultados del test de Friedman para las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en *SVM*.

$Q$	$k - 1$	$valor - p$
1796.66	3	0

Una vez más, los métodos de preprocesamiento presentan diferencias significativas también para las arquitecturas basadas en *SVM*. Los resultados del test realizado a posteriori se muestran en la figura 5.23 y presentan una novedad respecto a arquitecturas anteriores. El método que logra el mejor rendimiento vuelve a ser la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de nivel 3 (*FFT(Det<sub>3</sub>)*) pero, en este caso, está seguido por la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de detalle de nivel 2 (*FFT(Det<sub>2</sub>)*)

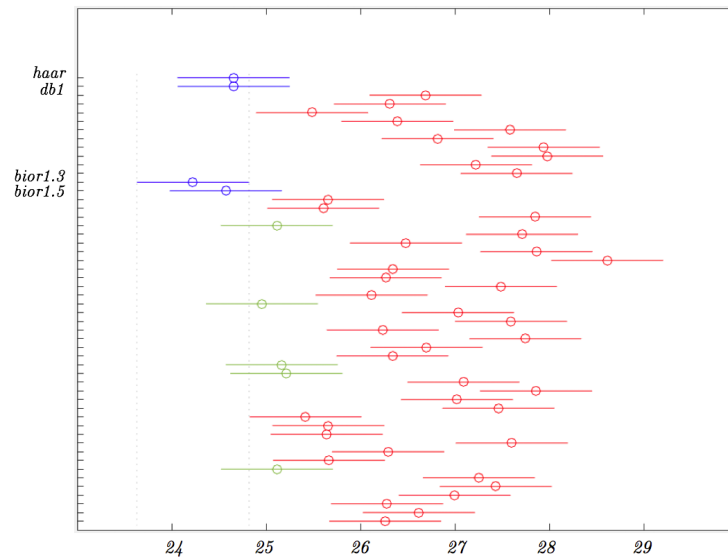




**Figura 5.23:** Representación gráfica de la comparación de las técnicas de preprocesamiento propuestas sobre las arquitecturas basadas en *SVM*.

en vez de por la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de aproximación de nivel 2 ( $FFT(Ap_2)$ ).

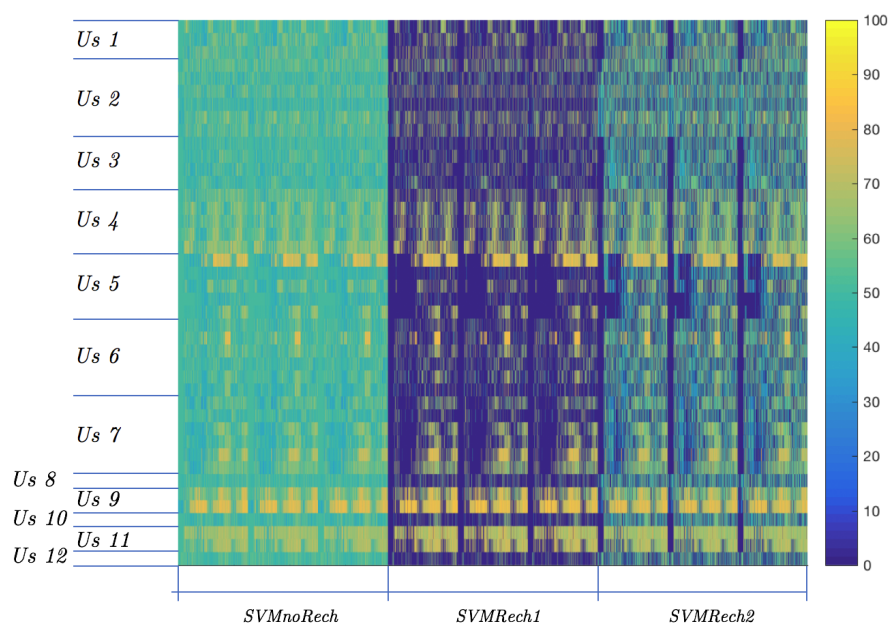
Analizando a continuación el rendimiento de las distintas subfamilias de wavelets, las diferencias no son significativas, pero vuelven a destacar las subfamilias *bior1.3* y *bior1.5*, como se puede observar en la figura 5.24.



**Figura 5.24:** Representación gráfica de la comparación de las subfamilias wavelet para las arquitecturas propuestas sobre *SVM*.

Estudiadas las técnicas de preprocesamiento, se analizan a continuación los rendimientos de las distintas arquitecturas basadas en *SVM*. La figura 5.25 muestra, como en los casos anteriores, las tasas de acierto de todas las parametrizaciones representando las va-

riantes diseñadas en el eje de abscisas, 5643 en este caso, y las 42 series grabadas por los sujetos voluntarios del estudio en el eje de coordenadas. La figura muestra, por tanto, las 237006 tasas de acierto obtenidas.



**Figura 5.25:** Representación gráfica de las tasas de acierto de las arquitecturas basadas en *SVM* para todas las series grabadas.

Se observa en la gráfica que el comportamiento de las tres arquitecturas es similar para las series para las que las tasas de acierto son altas, puesto que las zonas amarillas son aparentemente iguales para todas las alternativas. La implementación de la clase de rechazo no parece mejorar los resultados, sino, tan solo, que algunas parametrizaciones queden anuladas. Aparentemente, estas parametrizaciones estarían rechazando señales bien y mal clasificadas por igual.

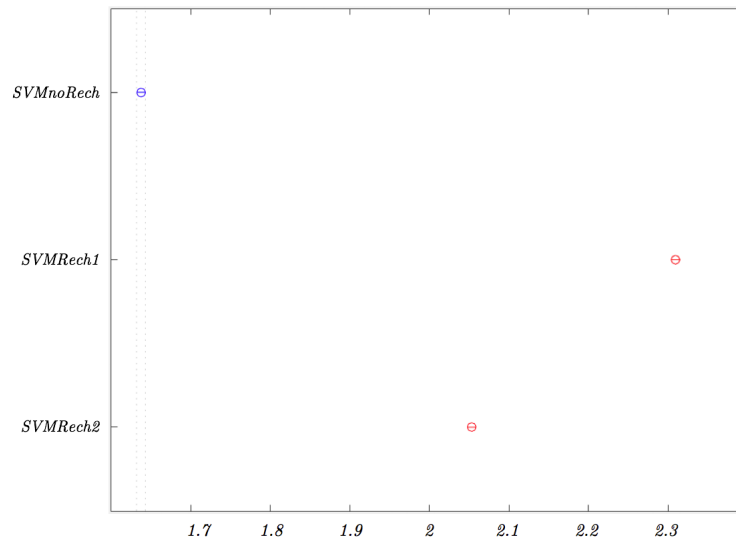
Visualizadas mediante el gráfico anterior las tasas de acierto de todas las variantes diseñadas, con el fin de profundizar en el análisis de las arquitecturas propuestas sobre *SVM*, se realiza el test de Friedman sobre las tasas de acierto agrupadas por arquitectura. El resultado del test (véase la tabla 5.20) indica que hay diferencias significativas entre las diferentes alternativas diseñadas.

**Tabla 5.20:** Resultados del test de Friedman para las arquitecturas basadas en *SVM*.

$Q$	$k - 1$	valor - $p$
20334.83	2	0

El análisis realizado sobre las tasas de acierto de estas arquitecturas muestra unos resultados interesantes que no se han presentado en ninguno de los casos anteriores y prueban las hipótesis iniciales anteriormente expuestas. Como puede verse en la figura 5.26 el mejor método es *SVMnoRech*, única arquitectura sin rechazo de entre todas las propuestas. Incluso la arquitectura *SVMRech2* presenta peor rendimiento, teniendo un

intervalo de rechazo mínimo. La información aportada por la probabilidad descrita en 4.2.4.2 no aporta ninguna información adicional a la propia superficie de decisión construida por la máquina de soporte vectorial.



**Figura 5.26:** Representación gráfica de la comparación de las arquitecturas basadas en *SVM*.

En vista de los resultados obtenidos, no tiene sentido profundizar en este caso sobre los efectos de la tasa de rechazo en el rendimiento de los mejores métodos propuestos, puesto que el mejor método desde el primer momento es la arquitectura sin rechazo.

Se analizan, a continuación, los rendimientos de las distintas parametrizaciones de estas arquitecturas. Por un lado, las tablas 5.21 y 5.22 muestran diferencias significativas en dichos rendimientos para diferentes valores del parámetro  $\gamma$ . No así, sin embargo, para los valores del factor de coste,  $c$ .

**Tabla 5.21:** Resultados del test de Friedman para el estudio del parámetro  $\gamma$  en las arquitecturas basadas en *SVM*.

$Q$	$k - 1$	$valor - p$
2651.84	2	0

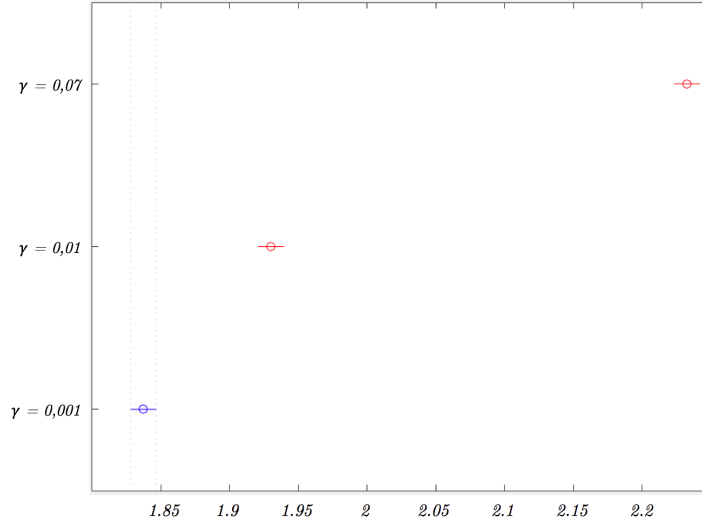
**Tabla 5.22:** Resultados del test de Friedman para el estudio del factor de coste,  $c$ , en las arquitecturas basadas en *SVM*.

$Q$	$k - 1$	$valor - p$
0.25	2	0.8819

El análisis a posteriori para las distintas alternativas del parámetro  $\gamma$ , figura 5.27, muestra que el valor 0,001 es la mejor opción.

#### 5.7.4. Conclusiones y aportaciones

Finalmente, al igual que en los experimentos anteriores basados en otros algoritmos, después del estudio de los sistemas diseñados sobre *SVM*, la propuesta final de arquitectura



**Figura 5.27:** Estudio del parámetro  $\gamma$  en las arquitecturas basadas en *SVM*.

completa para el diseño de una BCI sería:

- Preprocesamiento mediante la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de tercer nivel. En este caso, tampoco se han observado diferencias estadísticamente significativas entre las subfamilias de wavelets. La propuesta sería utilizar aquellas que han destacado en el análisis a priori, dos de las cuales coinciden con los apartados previos: *haar*, *bior1.3* y *bior1.5*.
- Clasificación mediante *SVMNoRech*, con  $\gamma = 0,001$  y cualquiera de los valores probados para  $c$ .

## 5.8. Comparativa de las mejores arquitecturas

En los apartados anteriores se han analizado las arquitecturas propuestas clasificadas en función de los algoritmos en base a los cuales han sido diseñadas. En este último apartado relativo a los experimentos, se compararán globalmente estas mejores alternativas destacadas en cada uno de los apartados de conclusiones previos 5.5.4, 5.6.4 y 5.7.4 con el objetivo de proponer una arquitectura definitiva para la implementación de una BCI. Las arquitecturas que han destacado para cada uno de los algoritmos son:

1. Arquitecturas basadas en el algoritmo *ACP* robusto que construye dos matrices de características especializadas  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_3}$  y  $\mathbf{F}_{\text{rob}C_4}$  a partir de los registros obtenidos en  $C_3$  y  $C_4$ .
  - a)  $ACP1^{-2} rda FFT(Det_3) db2$
  - b)  $ACP1^{-2} rda FFT(Det_3) bior1.5$
  - c)  $ACP1^{-2} rda FFT(Det_3) sym2$

- d)  $ACP1_5^{-2} rda FFT(Det_3) db2$
- e)  $ACP1_5^{-2} rda FFT(Det_3) bior1.5$
- f)  $ACP1_5^{-2} rda FFT(Det_3) sym2$

2. Arquitecturas basadas en el algoritmo *MCP* robusto.

- a)  $MCPRob^6 FFT(Det_3) bior1.3$
- b)  $MCPRob^6 FFT(Det_3) bior1.5$
- c)  $MCPRob^7 FFT(Det_3) bior1.3$
- d)  $MCPRob^7 FFT(Det_3) bior1.5$

3. Arquitecturas basadas en *SVM*.

- a)  $SVMnoRech_{100}^{0,001} FFT(Det_3) haar$
- b)  $SVMnoRech_{100}^{0,001} FFT(Det_3) bior1.3$
- c)  $SVMnoRech_{100}^{0,001} FFT(Det_3) bior1.5$

Aplicando el mismo análisis estadístico realizado a lo largo del presente capítulo de experimentos, la tabla 5.23 contiene los resultados del test de Friedman sobre las tasas de acierto de estas arquitecturas e indica que existen diferencias significativas entre algunos de ellos.

**Tabla 5.23:** Resultados del test de Friedman para las mejores arquitecturas.

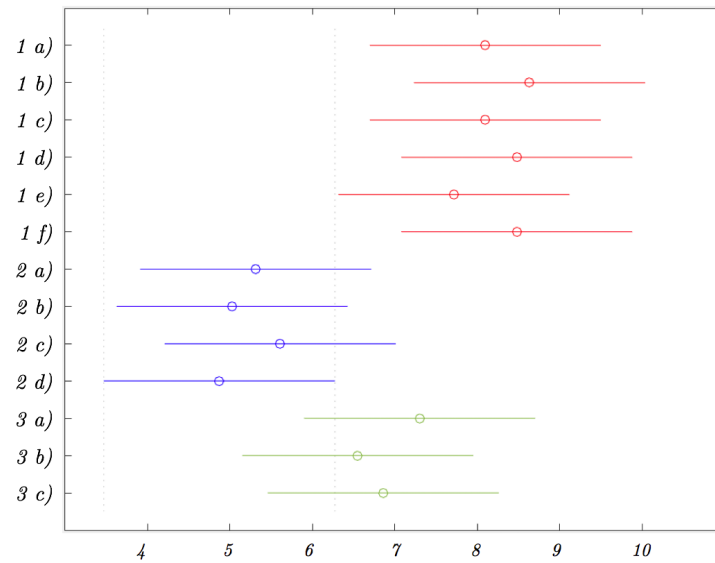
$Q$	$k - 1$	$valor - p$
82.19	12	2.1 e-09

Dado que existe una diferencia estadísticamente relevante entre algunos de estos métodos, corresponde proceder con el análisis a posteriori de los datos cuyo resultado se muestra en la figura 5.28. En esta gráfica se identifican claramente los tres grupos de algoritmos basados en *MCP*, que aparecen con mejor rendimiento en color azul, *SVM* a continuación en color verde y, finalmente, *ACP* en color rojo.

La primera conclusión relevante se deriva de que la arquitectura que aparece en primer lugar,  $MCPRob^6 FFT(Det_3) bior1.5$ , es significativamente mejor que todas las arquitecturas basadas en *ACP*. Este hecho, junto con las altas tasas de rechazo de estas últimas arquitecturas, permite descartarlas como base de una BCI.

La segunda conclusión es que no es posible, sin embargo, hacer una elección definitiva entre las técnicas basadas en *MCP* y *SVM*. Estudiando, no obstante, las conclusiones obtenidas en los múltiples experimentos realizados, podría proponerse una arquitectura fusionada con las siguientes fases:

- Preprocesamiento mediante la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de tercer nivel con la subfamilia que ha destacado en todos los métodos analizados: *bior1.5*.



**Figura 5.28:** Representación gráfica de la comparación de las mejores arquitecturas.

- Extracción de características y clasificación mediante *MCPRob*, utilizando 6 componentes latentes (dado que no se pueden probar diferencias significativas entre ambas opciones, la utilización de 6 componentes reduciría el tiempo de cómputo del algoritmo).
- Clasificación mediante de las señales rechazadas por *MCPRob* mediante *SVMNoRech*, con  $\gamma = 0,001$  y cualquiera de los valores probados para  $c$ .



## Capítulo 6

# Conclusiones y trabajos futuros

### 6.1. Conclusiones

En este trabajo se propone una arquitectura novedosa para una interfaz cerebro-ordenador no invasiva, basada en el registro EEG, independiente y síncrona, que analiza las oscilaciones cerebrales al realizar dos tareas mentales relacionadas con la imaginación motora, haciendo uso, únicamente, de las señales recogidas en dos electrodos ( $C_3$  y  $C_4$ ).

Además del diseño de la arquitectura global, se han realizado aportaciones en las distintas fases que la componen y que se detallan a continuación.

Concretamente, en lo que se refiere a la fase inicial de preprocesamiento, extracción y selección de características de las señales, se ha propuesto, en primer lugar, una arquitectura combinada de la transformada de Fourier y la transformada wavelet para el preprocesamiento de la señal EEG que mejora su rendimiento individual y reduce el número de coeficientes que forman el vector de entrada de las fases posteriores. Se ha demostrado que los coeficientes de tercer nivel de la transformada wavelet discreta, aplicada sobre este tipo de registros, extraen con precisión el ritmo  $\mu$  que caracteriza las tareas mentales realizadas y mejoran el rendimiento del sistema de forma estadísticamente significativa si se analiza después con la transformada de Fourier. Se ha demostrado, igualmente, que la información contenida en el ritmo  $\mu$  es más relevante que la contenida en el ritmo  $\beta$  que puede ser descartada en esta fase de preprocesamiento. Se aporta en este trabajo un estudio intensivo de las propiedades y ventajas de las distintas subfamilias de wavelets que, aun no habiendo alcanzado una conclusión estadísticamente discriminante, ha permitido localizar un conjunto de subfamilias con mejor rendimiento para el diseño de una BCI.

Dentro de esta primera fase, a partir del preprocesamiento citado, se ha diseñado, además, una arquitectura completa de extracción y selección de características basada en el algoritmo de análisis de componentes principales estudiando su versión original y su versión robustecida. Se ha realizado una propuesta que construye dos matrices de



características especializadas en cada una de las tareas mentales y se ha demostrado su validez frente a otras alternativas. Se ha presentado, además, una modificación del algoritmo eliminando componentes principales con el objetivo de filtrar el ruido presente en este tipo de señales. Se ha demostrado que, efectivamente, las componentes principales más relevantes no aportan información significativa a las matrices de características, sino que empeoran el rendimiento de las mismas.

Finalmente, dentro de esta fase, se ha presentado una arquitectura completa de selección y extracción de características adaptando el algoritmo de mínimos cuadrados parciales, tanto en su versión original como robustecida, al análisis de señales EEG. Se ha demostrado la capacidad de este algoritmo para extraer las variables latentes relevantes que modelan la información subyacente almacenada en el conjunto de datos de entrenamiento y sus clases.

En lo que se refiere a la fase de clasificación, se han presentado cuatro arquitecturas de clasificación adaptadas a los métodos de selección y extracción de características propuestos, y optimizadas para el tratamiento de señales EEG. En primer lugar, se ha presentado una arquitectura de clasificación basada en la distancia entre las señales originales y las recuperadas mediante las matrices de características especializadas obtenidas por el algoritmo *ACP* robusto. La arquitectura fusiona las predicciones de dos clasificadores independientes, especializados en cada tarea mental, y ha demostrado lograr tasas excelentes de acierto, si bien a costa de tasas muy altas de rechazo. Se ha diseñado un clasificador basado en el análisis discriminante robustecido también sobre las señales transformadas por las matrices de características especializadas construidas mediante el algoritmo *ACP* robusto que, finalmente, ha demostrado peor rendimiento que el resto de las alternativas estudiadas. En tercer lugar, se ha propuesto una adaptación del algoritmo de regresión lineal para la clasificación de señales electroencefalográficas a partir de las componentes latentes construidas mediante el algoritmo *MCP* en su versión normal y robustecida. Esta alternativa ha demostrado alcanzar los mejores rendimientos con un reducido número de variables latentes. Finalmente, se ha detallado en profundidad la utilización de las máquinas de vectores soporte como clasificador de este tipo de señales y se han confrontado su rendimiento con todas las alternativas anteriores.

A nivel general, en lo que se refiere al diseño de una BCI completa, se ha realizado una evaluación exhaustiva de todas las alternativas diseñadas. Se han propuesto, analizado y evaluado 20482 parametrizaciones distintas de las arquitecturas basadas en *ACP*, *MCP* y *SVM* sobre 42 series de grabaciones llevadas a cabo por 12 usuarios diferentes, lo que supone un total de más de 860000 experimentos.

La base de datos, convenientemente etiquetada, se ha puesto a disposición de la comunidad científica.

Se ha presentado un completo análisis estadístico de las tasas de acierto de todas las alternativas propuestas analizando en profundidad la influencia de cada hipótesis y parame-

trización. Finalmente, como resultado de todo lo anterior, se ha propuesto la arquitectura de una BCI definitiva que fusiona los mejores métodos propuestos: el preprocesamiento de las señales mediante la transformada de Fourier de los coeficientes wavelet de tercer nivel, obtenidos por las subfamilias *bior1.3* y *bior1.5*, la extracción de características y clasificación basada en el algoritmo de mínimos cuadrados parciales robusto con seis componentes latentes y la clasificación de las señales rechazadas por este último algoritmo mediante una máquina de vectores soporte de núcleo RBF sin rechazo.

En este trabajo, además, se han presentado y formalizado, el marco teórico fundamental y las bases matemáticas de todos los algoritmos y técnicas estudiadas para el preprocesamiento, extracción y selección de características y la clasificación de señales electroencefalográficas con el objetivo de diseñar una BCI no invasiva.

## 6.2. Trabajos futuros

Alcanzada la propuesta final de una arquitectura operativa para una interfaz cerebro-ordenador, se proponen los siguientes trabajos futuros:

En primer lugar, se propone el diseño de un banco de experimentación para la validación en tiempo real de la BCI propuesta. Esta arquitectura de pruebas permitiría afianzar las hipótesis validadas en este trabajo, ampliar la base de datos y estudiar la influencia de su funcionamiento en tiempo real. En algunas pruebas preliminares realizadas con la arquitectura final presentada en tiempo real, se ha detectado una influencia significativa del proceso de aprendizaje del usuario cuando se facilita una realimentación en paralelo con la ejecución de las tareas mentales. Sin duda, sería una línea interesante de investigación explorar esta capacidad de aprendizaje, si es común a todos los sujetos y en qué medida puede paliar las deficiencias de la propia interfaz.

El diseño modular de las arquitecturas analizadas, especialmente la arquitectura basada en *MCPRob* que ha demostrado tener un mejor rendimiento, permite escalar el diseño para tratar de distinguir y clasificar un número mayor de tareas mentales. Por ello, se propone abrir una línea de investigación que explore y analice esta posibilidad.

Se plantea, además, la opción de explorar otras técnicas de clasificación (p. ej. con las redes neuronales artificiales, inicialmente exploradas en este trabajo y descartadas en aquel momento por no aportar mejoras al diseño).

Una línea de investigación adicional podría ahondar en la fusión colaborativa de los mejores métodos estudiados.

Finalmente, se propone como trabajo futuro la integración de esta BCI con un sistema real de comunicación o ayuda a la movilidad para personas con diversidad funcional, poniendo el sistema a disposición de la comunidad científica para poder ser probado con otros tipo de señales o interfaces (invasivas, asíncronas, etc.).



## Apéndice A

# Características del cluster de computación

- Interfaz (nodo principal y servidor de almacenamiento masivo):
  - SuperServer SYS-6026T-URF Supermicro 2U Negro
  - 2 x Intel Nehalem E5520 2.26GHz LGA1366 5,86GT/D SEC 8M
  - 6 x DDR3 1066 2GB ECC Registered
  - 8 x ST31000640SS Seagate 1TB SAS 7200RV 3.5", configuración RAID 1+0
  - Controladora ARC-1680I 8P SAS PCI Express
  - Tarjeta AOC-UTG-i2 2 puertos 10G UIO NIC
- 2 x nodos de computación (2 placas base cada uno):
  - SuperServer SYS-6016TT-TF 1U
  - 4 x Intel Nehalem E5520 2.26GHz LGA1366 5,86GT/D SEC 8M
  - 12 x DDR3 1066 2GB ECC Registered
  - 4 x ST3750330NS Seagate 750Gb 7200 SATAII 32MB, configuración RAID 1
- 1 x nodo de computación (2 placas base):
  - SuperServer SYS-6016TT-TF 1U
  - 2 x Intel DP Westmere 4C E5620 2.4G 12M 5.86GT
  - 24 x DDR3 1066 2GB ECC Registered
  - 2 x ST31000524NS Seagate 1TB 7200 SATAII 32MB, configuración RAID 1
- 1 x nodo de computación con GPUs:
  - Superserver SYS-2026GT-TRF-FM409 SUPERMICRO

- 2 x INTEL DP WESTMERE 4C E562'2.4g 12m 5.86gt
- 6 x DDR3 1333 4GB ECC REGISTERED
- 1 x SATA3 WD5000BPKT WESTERN DIGITAL 500GB 7200 16MB
- La configuración actual de GPU incluye 4 TESLA UNITS M2090

# Bibliografía

- [Abd03] H. Abdi. *Encyclopedia of Social Sciences Research Methods*, chapter Partial Least Squares (PLS) Regression. Thousand Oaks, 2003.
- [Abd17] H. Abdi. PLS-regression matlab programs. [https://www.utdallas.edu/~herve/PLS\\_Programs\\_From\\_Abdi\\_2003.zip](https://www.utdallas.edu/~herve/PLS_Programs_From_Abdi_2003.zip), 2017.
- [Abr03] L. González Abril. Modelos de clasificación basados en máquinas de vectores soporte. In *Congreso de la Asociación Científica Europea de Economía Aplicada*, 2003.
- [ABS<sup>+</sup>12] Nicholas R Anderson, Tim Blakely, Gerwin Schalk, Eric C Leuthardt, and Daniel W Moran. Electrocorticographic (ECoG) correlates of human arm movements. *Experimental brain research*, 223(1):1–10, 2012.
- [AK03] C.W. Anderson and M. Kirby. EEG Subspace representations and feature selection for brain-computer interfaces. Madison, Wisconsin, June 2003.
- [Alt96] Joshua Altmann. Surfing the wavelets. WWW, 1996.
- [AM34] Edgar Adrian and Brian Matthews. The Interpretation of potential waves in the cortex. *Journal of Physiology*, 81:440–471, 1934.
- [And05] C. Anderson. Taxonomy of feature extraction and translation methods for BCI. <http://www.cs.colostate.edu/eeg/taxonomy.html>, 2005.
- [AS96] C. W. Anderson and Zlatko Sijercic. Classification of EEG Signals from Four Different Subjects during Five Mental Tasks. In A.B. Bulsari, S. Kallio, and D. Tsaptsinos, editors, *Solving Engineering Problems with Neural Networks*, pages 407–414, Turkey, 1996.
- [ASS98] C. W. Anderson, E. A. Stolz, and S. Shamsunder. Multivariate autoregressive models for classification of spontaneous electroencephalogram during mental tasks. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 45(3):277–286, March 1998.
- [BA83] P. Burt and E. Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Transactions on Communications*, 31(4):532–540, Apr 1983.

- [BAD<sup>+</sup>16] Benjamin Blankertz, Laura Acqualagna, Sven Dähne, Stefan Haufe, Matthias Schultze-Kraft, Irene Sturm, Marija Ušćumlic, Markus A. Wenzel, Gabriel Curio, and Klaus-Robert Müller. The berlin brain-computer interface: Progress beyond communication and control. *Frontiers in Neuroscience*, 10:530, 2016.
- [Bar93] John S. Barlow. *The Electroencephalogram*. The MIT Press, 1993.
- [BCTALL<sup>+</sup>17] Manuel Bayon-Calatayud, Fernando Trincado-Alonso, Eduardo López-Larraz, Luis Montesano, José Luis Pons, and Ángel Gil-Agudo. Usability of the combination of brain-computer interface, functional electrical stimulation and virtual reality for improving hand function in spinal cord injured patients. In *Converging Clinical and Engineering Research on Neurorehabilitation II*, pages 331–335. Springer, 2017.
- [BDK<sup>+</sup>05] B. Blankertz, G. Dornhege, M. Krauledat, K.-R. Müller, and G. Curio. The Berlin brain-computer interface: Report from the feedback sessions. *Tech. Rep*, 1, 2005.
- [BDK<sup>+</sup>06] B. Blankertz, G. Dornhege, M. Krauledat, K.-R. Müller, V. Kunzmann, F. Losch, and G. Curio. The Berlin Brain-Computer Interface: EEG-Based Communication Without Subject Training. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 14(2):147–152, June 2006.
- [BDS<sup>+</sup>03] B. Blankertz, G. Dornhege, C. Schaefer, R. Krepki, J. Kohlmorgen and K. Mueller, V. Kunzmann and F. Losch, and G. Curio. Boosting bit rates and error detection for the classification of fast-paced motor commands based on single-trial EEG analysis. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.*, 11(2):127–131, June 2003.
- [BECR90] N. Birbaumer, T. Elbert, A.G.M. Canavan, and B. Roch. Slow potentials of the cerebral cortex and behaviour. *Physiological Reviews*, 70:1–41, 1990.
- [Ber29] Hans Berger. Über das elektrenkephalogramm des menschen. *Arch Psychiatr Nervenkr*, 87:527–570, 1929.
- [BGG98] C. S. Burrus, R. A. Gopinath, and H Guo. *Introduction to Wavelets and Wavelets Transforms*. Prentice Hall, 1998.
- [Bis95] M. Bishop. *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford U.K., 1995.
- [BKM<sup>+</sup>09] Tonio Ball, Markus Kern, Isabella Mutschler, Ad Aertsen, and Andreas Schulze-Bonhage. Signal quality of simultaneously recorded invasive and non-invasive EEG. *Neuroimage*, 46(3):708–716, 2009.

- [BMB03] Gary E. Birch, Steven G. Mason, and Jaimie F. Borisoff. Current Trends in Brain-Computer Interface Research at the Neil Squire Foundation. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, 11(2):123–126, June 2003.
- [BPS<sup>+</sup>03] F. Beverina, G. Palmas, S. Silvoni, F. Piccione, and S. Giove. User Adaptive BCI's: SSVEP and P300 based interfaces. *Psychology Journal*, 1(4):331–354, 2003.
- [Bro95] Joseph D. Bronzino. *Biomedical Engineering Handbook*, chapter Principles of electroencephalography, pages 201–222. CRC Press, 1995.
- [BTV<sup>+</sup>10] Benjamin Blankertz, Michael Tangermann, Carmen Vidaurre, Siamac Fazli, Claudia Sannelli, Stefan Haufe, Cecilia Maeder, Lenny E Ramsey, Irene Sturm, Gabriel Curio, et al. The berlin brain-computer interface: non-medical uses of BCI technology. *Frontiers in neuroscience*, 4:198, 2010.
- [Bur98] Christopher J. C. Burges. A tutorial on support vector machines for pattern recognition. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 2(2):121 – 167, June 1998.
- [BW03] M. Barker and Rayens W. Partial least squares for discrimination. *Journal of Chemometrics*, 17:166–173, 2003.
- [CEG76] A. Croisier, D. Esteban, and C. Galand. Perfect channel splitting by use of interpolation decimation tree decomposition techniques. In *Conference on Inform. Sciences and Systems*, pages 443–446, August 1976.
- [Cip93] Barry Cipra. Wavelet Applications came to the Fore. *SIAM News*, 26(7), November 1993.
- [CIÚ<sup>+</sup>16] Álvaro Costa, Eduardo Iáñez, Andrés Úbeda, Enrique Hortal, Antonio J Del-Ama, Angel Gil-Agudo, and José M Azorín. Decoding the attentional demands of gait through EEG gamma band features. *PloS one*, 11(4):e0154136, 2016.
- [CL11] Chih-Chung Chang and Chih-Jen Lin. Libsvm: A library for support vector machines. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, 2(3), April 2011.
- [Cod93] Mac A. Cody. A Wavelet Analyzer. An Alternative to the FFT-based Spectrum Analyzer. *Dr. Dobb's Journal*, April 1993.
- [Coh60] J. Cohen. A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement*, 20:37–46, 1960.
- [CR95] M.G.H. Coles and M.D. Ruggs. *Electrophysiology of the mind: event-related brain potentials and cognition*, chapter Event-related potentials: an introduction. Oxford University Press, New York, 1995.



- [CRG96] C. Croux and A. Ruiz-Gazen. A fast algorithm for robust principal components based on projection pursuit. In A. Prat, editor, *Proceedings in Computational Statistics*, pages 211–217. Heidelberg: Physica-Verlag, 1996.
- [CS06] Hua Cui and Guoxiang Song. Study of the wavelet basis selections. In *Proc. International Conference on Computational Intelligence and Security*, volume 2, pages 1833–1836, 2006.
- [CSP99] C. Neuper, A. Schlögl, and G. Pfurtscheller. Enhancement of left-right sensorimotor EEG differences during feedback-regulated motor imagery. *J. Clin. Neurophysiol.*, 16(4):373–382, July 1999.
- [CSS95] C.W.Anderson, S.V.Devulapalli, and E.A. Stolz. Determining Mental State from EEG Signals Using Neural Networks. *Scientific Programming*, (4):172–183, 1995.
- [CST14] Nello Cristianini and John Shawe-Taylor. *An Introduction to Support Vector Machines*. Cambridge University Press, 2014.
- [Cul99] Jack Culpepper. *Discriminating Mental States using EEG Represented by Power Spectral Density*. PhD thesis, Harvey Mudd College, Claremont, California, May 1999.
- [CV95] Corinna Cortes and Vladimir Vapnik. Support-vector networks. *Machine Learning*, 20(3):273 – 297, September 1995.
- [CWF76] R. E. Crochiere, S.A. Webber, and J.L. Flanagan. Digital coding of speech in sub-bands. *Bell System Technical Journal*, 55(8):1069–1085, October 1976.
- [CWM07] Shirley M Coyle, Tomás E Ward, and Charles M Markham. Brain-computer interface using a simplified functional near-infrared spectroscopy system. *Journal of neural engineering*, 4(3):219, 2007.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [DBCM04] G. Dornhege, B. Blankertz, G. Curio, and R.-K. Müller. Boosting bit rates in non-invasive EEG single-trial classifications by feature combination and multi-class paradigms. *IEEE Trans. Biomed. Eng*, 51(2004):993–1002, June 2004.
- [DBG<sup>+</sup>15] KV Dijkstra, P Brunner, A Gunduz, W Coon, AL Ritaccio, J Farquhar, and G Schalk. Identifying the attended speaker using electrocorticographic (ECoG) signals. *Brain-Computer Interfaces*, 2(4):161–173, 2015.

- [DD02] Nguyen D.V. and Rocke D.M. Tumor classification by partial least squares using microarray gene expression data. *Bioinformatics*, 18(1):39–50, 2002.
- [Dem06] Janez Demšar. Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets. *J. Mach. Learn. Res.*, 7:1–30, 2006.
- [Dor06] G. Dornhege. *Increasing information transfer rates for brain-computer interfacing*. PhD thesis, University of Postdam, Postdam, Germany, 2006.
- [DS52] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer. A class of non harmonic fourier series. *Transactions of the American Mathematical Society*, 72(2):341–366, March 1952.
- [DS81] N. Draper and H. Smith. *Applied Regression Analysis*. Wiley, 1981.
- [DSW00] E. Donchin, K.M. Spencer, and R. Wijesinghe. The mental prosthesis: assessing the speed of a P300-based Brain-Computer Interface. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, 8:174–179, 2000.
- [Ech08] J. Echegoyen. Diccionario de psicología científica y filosófica. <http://www.e-torredabel.com/Psicologia/Vocabulario/Psicologia-Vocabulario.htm>, 2008.
- [EVG03] Touradj Ebrahimi, Jean-Marc Vesin, and Gary Garcia. Brain-Computer Interface in Multimedia Communication. *IEEE Signal Processing*, 20(1):14–23, January 2003.
- [FBFSF<sup>+</sup>09] André Ferreira, Teodiano Freire Bastos-Filho, Mário Sarcinelli-Filho, José Luis Martín Sánchez, Juan Carlos García García, and Manuel Mazo Quintas. Improvements of a brain-computer interface applied to a robotic wheelchair. In *International Joint Conference on Biomedical Engineering Systems and Technologies*, pages 64–73. Springer, 2009.
- [FBRB04] M. Fatourehchi, A. Bashashati, R.Ward, and G. Birch. A hybrid genetic algorithm approach for improving the performance of the LF-ASD brain computer interface. *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.*, 5:345–348, 2004.
- [FD88] L.A. Farwell and E. Donchin. Talking off the top of your head: toward a mental prosthesis utilizing event-related potenciales. *Electroencephalographic clinical Neurophysiology*, 70:510–523, 1988.
- [Fer98] Diego R. Llanos Ferraris. *La Transformada Wavelet y el Análisis de Señales Temporales*. Universidad de Valladolid. Departamento de Informática, Julio 1998.

- [FF75] E.E. Fetz and D.V. Finocchio. Correlations between activity of motor cortex cells and arm muscles during operantly conditioned response patterns. *Experimental Brain Research*, 23:217–240, 1975.
- [FL03] Leandro Ferreira and Walter E. Legnani. Wavelet study of sponge layer in 3D shallow water. *Mecánica Computacional*, XXII:283–297, November 2003.
- [Fle09] Tristan Fletcher. *Support Vector Machines Explained*. University College London, 2009.
- [FMWP04] G.E. Fabiani, D.J. McFarland, J.R. Wolpaw, and G. Purstcheller. Conversion of EEG activity into cursor movement by a brain-computer interface (BCI). *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 12(3):331–338, September 2004.
- [FPC<sup>+</sup>94] D. Flotzinger, G. Pfurtscheller, C. Neuper, J. Berger, and W. Mohl. Classification of non-averaged EEG data by learning vector quantisation and the influence of signal preprocessing. *Medical and Biological Engineering and Computing*, pages 571–575, 1994.
- [Fri37] Milton Friedman. The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 32(200):675–701, 1937.
- [FSMVE07] P. Filzmoser, S. Serneels, R. Maronna, and P.J. Van-Espen. Robust multivariate methods in chemometrics. Technical report, Institut f. Statistik u. Wahrscheinlichkeitstheorie, 2007.
- [Gan96] William F. Ganong. *Fisiología Moderna*. Manual Moderno, 15 edition, 1996.
- [Gar94] P.H. Garthwaite. An interpretation of partial least squares. *Journal of the American Statistical Association*, 89(425):122–127, March 1994.
- [GGM84] P. Goupillaud, A. Grossmann, and J. Morlet. Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration*, 23:85–102, 1984.
- [GK86] P. Geladi and B.R. Kowalski. Partial least squares regression: A tutorial. *Analytica Chimica Acta*, 185:1–17, 1986.
- [GK00] C. Ghez and J. Krakauer. *Principles of Neural Science*, chapter Voluntary Movement, pages 653–674. McGraw-Hill, New York, 4th edition, 2000.
- [GLO<sup>+</sup>05] G. Gage, K. Ludwig, K. Otto, E. Ionides, and D. Kipke. Naive coadaptive cortical control. *J. Neural Eng.*, 2:52–63, 2005.
- [GM80] R. Gunst and R. Mason. *Regression Analysis and its Applications*. 1980.

- [GM84] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *Journal of Math. Analysis*, 15(4):723–736, July 1984.
- [GR98] J.A. Gil and R. Romera. On robust partial least squares (PLS) methods. *Journal of Chemometrics*, 12:365–378, 1998.
- [Gra95] Amara Graps. An Introduction to Wavelets. *IEEE Computational Science and Engineering*, 2(2), Summer 1995.
- [Gun98] Steve R. Gunn. Support vector machines for classification and regression. ISIS Technical Report, May 1998.
- [HB03] M. Hubert and K.V. Branden. Robust methods for partial least squares regression. *Journal of Chemometrics*, 17:537–549, 2003.
- [HCL16] Chih-Wei Hsu, Chih-Chung Chang, and Chih-Jen Lin. A practical guide to support vector classification, May 2016.
- [HE04] M. Hubert and S. Engelen. Robust PCA and classification in biosciences. *Bioinformatics*, 2004.
- [Hel88] I.S. Helland. On the structure of partial least squares regression. *Communications in Statistics - Simulation and Computing*, 17(2):581–607, 1988.
- [Hel90] I.S. Helland. Partial least squares regression and statistical models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 17:97–114, 1990.
- [Hel92] I.S. Helland. Maximum likelihood regression on relevant components. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 54(2):637–647, 1992.
- [Hel01] I.S. Helland. Some theoretical aspects of partial least squares regression. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 58:97–107, 2001.
- [HRS08] M. Hubert, P.J. Rosseeuw, and Aelst S.V. High-breakdown robust multivariate methods. *Statistical Science*, 23(1):92–119, 2008.
- [HRVB05] M. Hubert, P.J. Rousseauw, and K. Vanden Branden. ROBPCA: A new approach to robust principal component analysis. *Technometrics*, 47:64–78, 2005.
- [HS02] P.J. Hubert, M. and Rousseauw and Verbonen S. A fast method for robust principal components with applications to chemometrics. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 60:101–111, 2002.
- [HSN<sup>+</sup>04] Thilo Hinterberger, Stefan Schmidt, Nicola Neumann, Jürgen Mellinger, Benjamin Blankertz, Gabriel Curio, and Niels Birbaumer. Brain-computer communication and slow cortical potentials. *IEEE Transactions on Bio-medical Engineering*, 51(6):1011–1018, 2004.

- [HVD04] M. Hubert and K. Van Driesen. Fast and robust discriminant analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*, 45:301–320, 2004.
- [IMT07] U.G. Indahl, H. Martens, and Naes T. From dummy regression to prior probabilities in PLS-DA. *Journal of Chemometrics*, 21:529–536, 2007.
- [JK11] Xiaoxuan Jia and Adam Kohn. Gamma rhythms in the brain. *PLoS Biol*, 9(4):e1001045, 2011.
- [Jol02] I.T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, 2 edition, 2002.
- [JP49] H.H. Jasper and W. Penfield. Electrocorticograms in man: effects of voluntary movements upon the electrical activity of the precentral gyrus. *Arch. Psychiat. Nervenkr.*, 183:163–174, 1949.
- [KA03] M. Kirby and C. Anderson. *Applied Mathematical Sciences Series*, chapter Geometric analysis for the characterization of non stationary time-series, pages 263–292. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [KBM<sup>+</sup>00] P.R. Kennedy, R.A.E. Bakay, M.M. Moore, K. Adams, and J. Goldwaithe. Direct Control of a Computer from the Human Central Nervous System. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, 8(2):198–202, June 2000.
- [KD65] H.H. Kornhuber and L. Deecke. Hirnpotentialänderungen bei Willkürbewegungen und passiven Bewegungen des Menschen: Bereitschaftspotential und reafferente Potentiale. *Pflügers Arch*, 284:1–17, 1965.
- [Ken89] P.R. Kennedy. The cone electrode: a long term electrode that records from neurites grown onto its recording surface. *Journal of Neuroscience Methods*, 29:181–193, 1989.
- [KKLT92] T. Kohonen, J. Kangas, J. Laaksonen, and K. Torkkola. LVQ PAK: A program package for the correct application of Learning Vector Quantization algorithms. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neuronal Networks*, pages 725–730, Baltimore, June 1992. IEEE.
- [KKM<sup>+</sup>04] Philip R Kennedy, M Todd Kirby, Melody M Moore, Brandon King, and Adon Mallory. Computer control using human intracortical local field potentials. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 12(3):339–344, 2004.
- [KLH05] B. Kamousi, Z. Liu, and B. He. Classification of motor imagery tasks for Brain-Computer Interface applications by means of two equivalent dipoles analysis. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.*, 13(2):166–171, June 2005.

- [Koh90] T. Kohonen. The self-organizing map. *Proceedings of the IEEE*, 78(9):1464–1480, September 1990.
- [KSMW05] D. Krusienski, G. Schalk, D. McFarland, and J. Wolpaw. Tracking of the mu rhythm using an empirically derived matched filter. pages 86–89, March 2005.
- [Kuh78] W.N. Kuhlman. EEG feedback training of epileptic patients: clinical and electroencephalographic analysis. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 45:699–710, 1978.
- [LB98] James M. Lewis and C. Sidney Burrus. Approximate Continuous Wavelet Transform with an Application to Noise Reduction. *IEEE*, pages 1533–1536, 1998.
- [LBCM05] S. Lemm, B. Blankertz, G. Curio, and K.-R. Müller. Spatio-spectral filters for improved classification of single trial EEG. *IEEE Trans. Biomed. Engineering*, 52(9):1541–1548, September 2005.
- [LGG04] Y. Li, X. Gao, and S. Gao. Classification of single-trial electroencephalogram during finger movement. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 51(6):1019–1025, June 2004.
- [LHB<sup>+</sup>00] Simon P. Levine, Jane E. Huggins, Spencer L. BeMent, Ramesh K.Kushwaha, Lori A. Schuh, Mitchell M. Rohde, Erasmo A. Passaro and Donald A. Ross, Kost V. Elisevich, and Brien J. Smith. A Direct Brain Interface based on Event-Related Potentials. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, 8(2):180–185, June 2000.
- [LLW07] Hsuan-Tien Lin, Chih-Jen Lin, and Ruby C. Weng. A note on Platt’s probabilistic outputs for support vector machines. *Machine Learning*, 68(3):267–276, 2007.
- [LSH<sup>+</sup>05] Thomas Navin Lal, Michael Schröder, N Jeremy Hill, Hubert Preissl, Thilo Hinterberger, Jürgen Mellinger, Martin Bogdan, Wolfgang Rosenstiel, Thomas Hofmann, Niels Birbaumer, et al. A brain computer interface with online feedback based on magnetoencephalography. In *Proceedings of the 22nd international conference on Machine learning*, pages 465–472. ACM, 2005.
- [LSW<sup>+</sup>04] E. C. Leuthardt, G. Schalk, J. R. Wolpaw, J. G. Ojemann, and D.W. Moran. A brain-computer interface using electrocorticographic signals in humans. *J. Neural Eng.*, 1:63–71, 2004.
- [LV98] Jêrome Lebrun and Martin Vetterli. High Order Balanced Multiwavelets. *IEEE*, pages 1529–1532, 1998.

- [LW07] Y. Liu and Rayens W. PLS and dimension reduction for classification. *Computational Statistics*, 22:189–208, 2007.
- [Mal89a] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ . *Trans. American Math. Soc.*, 315:69–87, Sept 1989.
- [Mal89b] S.G. Mallat. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(12):2091–2110, Dec. 1989.
- [Mal89c] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, July 1989.
- [Mal99] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1999.
- [MAM<sup>+</sup>06] D. J. McFarland, C. W. Anderson, K. R. Müller, A. Schlögl, and D.J. Krusienski. BCI Meeting 2005-Workshop on BCI Signal Processing: Feature Extraction and Translation. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 14(2):135–137, June 2006.
- [Mar05] J. Tejeiro Martínez. *Electroencefalografía clínica básica*. Viguera Editores S.L., 2005.
- [MB00] Steven G. Mason and Gary E. Birch. A Brain-Controlled Switch for Asynchronous Control Applications. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 47(10):1297–1307, October 2000.
- [MBR64] Aizerman M., E. Braverman, and L. Rozonoer. Theoretical foundations of the potential function method in pattern recognition learning. *Automation and Remote Control*, 25:821 – 837, 1964.
- [Mey92] Y. Meyer. *Wavelets and Operators*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1992.
- [MHG<sup>+</sup>08] Tobias Moench, Maurice Hollmann, Ramona Grzeschik, Charles Mueller, Ralf Luetzkendorf, Sebastian Baecke, Michael Luchtmann, Daniela Waggegg, and Johannes Bernarding. Real-time classification of activated brain areas for fMRI-based human-brain-interfaces. In *Medical Imaging*, pages 69161R–69161R. International Society for Optics and Photonics, 2008.
- [MHM<sup>+</sup>15] Lynn M McCane, Susan M Heckman, Dennis J McFarland, George Townsend, Joseph N Mak, Eric W Sellers, Debra Zeitlin, Laura M Tentero-mano, Jonathan R Wolpaw, and Theresa M Vaughan. P300-based brain-computer interface (BCI) event-related potentials (ERPs): People with

- amyotrophic lateral sclerosis (ALS) vs. age-matched controls. *Clinical Neurophysiology*, 126(11):2124–2131, 2015.
- [MKB80] K. Mardia, J. Kent, and J. Bibby. *Multivariate Analysis*. Academic Press, 1980.
- [MKH<sup>+</sup>06] Steven Mason, Julien Kronegg, Jane Huggins, Mehrdad Fatourehchi, and Alois Schlögl. Evaluating the performance of self-paced brain computer interface technology. *Neil Squire Soc., Vancouver, BC, Canada, Tech. Rep*, 2006.
- [MM03] José del R. Millán and Josep Mouriño. Asynchronous BCI and Local Neural Classifiers: An Overview of the AdaptiveBrain Interface Project. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 11(2):159–161, June 2003.
- [MMCJ00] M. Middendorf, G. McMillan, G. Calhoun, and K.S. Jones. Brain-computer interfaces based on steady-state visual evoked response. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, 8:211–213, 2000.
- [MMOP97] Michael Misiti, Yves Misiti, George Oppenheim, and Jean-Michael Poggi. *Wavelet Toolbox for Use with Matlab. User's Guide*. The Mathworks Inc., 1997.
- [MPSCP06] G. R. Müller-Putz, R. Scherer, C. Neuper, and G. Pfurtscheller. Steady-State Somatosensory Evoked Potentials: Suitable Brain Signals for Brain-Computer Interfaces? *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 14:30–37, 2006.
- [MPSP016] GR Müller-Putz, A Schwarz, J Pereira, and P Ofner. From classic motor imagery to complex movement intention decoding: The noninvasive Graz-BCI approach. *Progress in brain research*, 228:39–70, 2016.
- [MPSPR05] Gernot R Müller-Putz, Reinhold Scherer, Gert Pfurtscheller, and Rüdiger Rupp. EEG-based neuroprosthesis control: a step towards clinical practice. *Neuroscience letters*, 382(1):169–174, 2005.
- [MRMG04a] J. del R. Millán, F. Renkens, J. Mourino, and W. Gerstner. Brain-computer interaction. *Artif. Intel.*, 159(1-2):241–259, November 2004.
- [MRMG04b] J. del R. Millán, F. Renkens, J. Mourino, and W. Gerstner. Noninvasive Brain-Actuated Control of a Mobile Robot by Human EEG. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 51(6):1026–1033, June 2004.
- [MSVR00] D. J. McFarland, W.A. Sarnacki, T.M. Vaughan, and J. R. Wolpaw. EEG-based brain-computer interface communication effect of target number and trial length on information transfer rate. *Soc Neurosci Abstr*, 26:1228, 2000.



- [MW05] D. J. McFarland and J. R. Wolpaw. Sensorimotor rhythm-based brain-computer interface (BCI): Feature selection by regression improves performance. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.*, 13(3):372–379, September 2005.
- [Nie05] E. Niedermeyer. *Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications and Related Fields*, chapter The normal EEG in waking adults, pages 167–192. Lippincott Williams and Wilkins, Baltimore, 5th edition, 2005.
- [NQVB05] H. Nocairi, E. M. Qannari, E. Vigneau, and D. Bertrand. Discrimination on latent components with respect to patterns. application to multicollinear data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 48:139–147, 2005.
- [OGCP01] B. Obermaier, C. Guger, C. Neuper, and G. Pfurtscheller. Hidden Markov models for online classification of single trial EEG data. *Pattern Recognition Letters*, 22:1299–1309, 2001.
- [PA78] G. Pfurtscheller and A. Aranibar. Änderungen in der spontanen EEG-Aktivität vor Willkürbewegungen. Neue Wege der Untersuchung der Zentralen mu-Aktivität. *Z. EEG-EMG*, 9:18–23, 1978.
- [PA79] G. Pfurtscheller and A. Aranibar. Evaluation of event-related desynchronization (ERD) preceding and following voluntary self-paced movement. *Electroencephalographic and clinical physiology*, 46:138–146, 1979.
- [PB89] G. Pfurtscheller and A. Berghold. Patterns of cortical activation during planning of voluntary movement. *Electroencephalographic and clinical physiology*, 72:250–258, 1989.
- [PBSDS06] Gert Pfurtscheller, C Brunner, A Schlögl, and FH Lopes Da Silva. Mu rhythm (de) synchronization and EEG single-trial classification of different motor imagery tasks. *NeuroImage*, 31(1):153–159, 2006.
- [PC97] G. Pfurtscheller and C. Neuper. Motor imagery activates primary sensorimotor area in man. *Neuroscience Letters*, 239:65–68, 1997.
- [PC01] G. Pfurtscheller and C. Neuper. Motor Imagery and Direct Brain-Computer Communication. *Proceedings of IEEE*, 89(7):1123–1134, July 2001.
- [PCFP97] G. Pfurtscheller, C. Neuper, D. Flotzinger, and M. Pergenzer. EEG-based discrimination between imagination of right and left hand movement. *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.*, 103:642–651, 1997.

- [PCG<sup>+</sup>00] G. Pfurtscheller, C. Neuper, C. Guger, W. Harkam, H. Ramoser and A. Schlögl, B. Obermaier, and M. Pregenzer. Current trends in Graz Brain-Computer Interface (BCI) research. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, 8(2):216–219, June 2000.
- [PCSL98] G. Pfurtscheller, C. Neuper, A. Schlögl, and K. Lugger. Separability of EEG signals recorded during right and left motor imagery using adaptive autorregressive parameters. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, 6(3):316–324, September 1998.
- [PdS99] G. Pfurtscheller and F.H. Lopes da Silva. Event-related EEG/EMG synchronization and desynchronization: basic principles. *Clinical Neurophysiology*, 110:1842–1857, 1999.
- [PKC11] Sarah D Power, Azadeh Kushki, and Tom Chau. Towards a system-paced near-infrared spectroscopy brain-computer interface: differentiating pre-frontal activity due to mental arithmetic and mental singing from the no-control state. *Journal of neural engineering*, 8(6):066004, 2011.
- [Pla00] John C. Platt. Probabilistic Outputs for Support Vector Machines and Comparisons to Regularized Likelihood Methods. In *Advances in Large Margin Classifiers*, pages 61–74. MIT Press, 2000.
- [PLdS05] G. Pfurtscheller and F. Lopes da Silva. *Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications and Related Fields*, chapter EEG Event-related desynchronization and event-related synchronization, pages 1003–1016. Lippincott Williams and Wilkins, Baltimore, 5th edition, 2005.
- [PLK<sup>+</sup>06] G. Pfurtscheller, R. Leeb, C. Keinrath, D. Friedman, C. Neuper, C. Guger, and M. Slater. Walking from thought. *Brain Research*, 1071(1):145–152, 2006.
- [PMPS<sup>+</sup>06] G. Pfurtscheller, G R. Müller-Putz, A. Schlögl, B. Grainmann and R. Scherer, R. Leeb, C. Brunner, C. Keinrath, F. Lee, G. Townsend, C. Vidaurre, and C. Neuper. 15 years of BCI research at Graz University of Technology: current projects. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 14(2):205–209, June 2006.
- [Pob88] José Mompín Poblet. *Introducción a la Bioingeniería*. Marcombo, 1988.
- [Pol95] Robi Polikar. Wavelet Tutorial. [www.polikar.com](http://www.polikar.com), Juny 1995.
- [PPF01] B. O. Peters, G. Pfurtscheller, and H. Flyvbjerg. Automatic Differentiation of Multichannel EEG Signals. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 48(1):111–116, January 2001.

- [QDH04] L. Qin, L. Ding, and B. He. Motor imagery classification by means of source analysis for brain computer-interface applications. *J. Neural Eng.*, 1:135–141, 2004.
- [RBEL84] B. Rockstroh, N. Birbaumer, T. Elbert, and W. Lutzenberger. Operant control of EEG and event-related and slow brain potentials. *Biofeedback and Self Regulation*, 9:1139–160, 1984.
- [RELB82] B. Rockstroh, T. Elbert, W. Lutzenberger, and N. Birbaumer. The effects of slow cortical potentials on response speed. *Psychophysiology*, 19(2):211–217, 1982.
- [Rio93] O. Rioul. Regular wavelets: a discrete-time approach. *IEEE Transactions on Signal Processing, Special Issue on Wavelets and Signal Processing*, 41(12):3572–3579, 1993.
- [RL05] Javier Romañach and Manuel Lobato. Diversidad funcional, nuevo término para la lucha por la dignidad en la diversidad del ser humano. *Foro de vida independiente*, 5:1–8, 2005.
- [Ros90] J.P. Rosenfeld. Applied psychophysiology and biofeedback of event-related potentials (brainwaves): historical perspective, review, future directions. *Biofeedback Self Reg.*, 15:99–119, 1990.
- [Rou84] P.J. Rousseauw. Least median of squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, 79:871–880, 1984.
- [RTM03] T. Rosipal, L. Trejo, and B. Matthews. Kernel PLS-SVC for linear and nonlinear classification. pages 640–647, Washington DC, 2003.
- [SBW<sup>+</sup>15] Reinhold Scherer, Martin Billinger, Johanna Wagner, Andreas Schwarz, Dirk Tassilo Hettich, Elaina Bolinger, Mariano Lloria Garcia, Juan Navarro, and Gernot Müller-Putz. Thought-based row-column scanning communication board for individuals with cerebral palsy. *Annals of physical and rehabilitation medicine*, 58(1):14–22, 2015.
- [Sch04] A. Schlögl. Conjunto de señales electroencefalográficas (sujetos 11, o3, o8). [http://www.dpmi.tugraz.at/schloegl/bci/bci7/Description\\_bci7.pdf](http://www.dpmi.tugraz.at/schloegl/bci/bci7/Description_bci7.pdf), 2004.
- [SCP02] A. Schlögl, C. Neuper, and G. Pfurtscheller. Estimating the mutual information of an EEG-based Brain-Computer-Interface. *Biomedizinische Technik*, 47(1-2):3–8, 2002.
- [SD06] E. W. Sellers and E. Donchin. A P300-based brain-computer interface: Initial tests by ALS patients,. *Clin. Neurophysiol.*, 117:538–548, 2006.

- [SDS95a] E.J. Stollnitz, A.D. DeRose, and D.H. Salesin. Wavelets for computer graphics: a primer, part 1. *IEEE Magazine Computer Graphics and Applications*, 14(3):76–84, May 1995.
- [SDS95b] E.J. Stollnitz, T.D. DeRose, and D.H. Salesin. Wavelets for computer graphics: a primer, part 2. *IEEE Magazine Computer Graphics and Applications*, 15(4):75–85, July 1995.
- [Shl05] J. Shlens. *A tutorial on Principal Component Analysis*. Systems Neurobiology Laboratory, Salk Institute for Biological Studies, La Jolla, San Diego, December 2005.
- [SKMP16] David Steyrl, Reinmar J Kobler, and Gernot R Müller-Putz. On similarities and differences of invasive and non-invasive electrical brain signals in brain-computer interfacing. *Journal of Biomedical Science and Engineering*, 9(08):393, 2016.
- [SKMW05] E. W. Sellers, D. J. Krusienski, D. J. McFarland, and J. R. Wolpaw. P300-based brain-computer interface (BCI) performance: Effects of matrix size and presentation rate. *Society for Neuroscience. Program No. 520.11. 2005 Abstract Viewer/ItineraryPlanner*, Online, 2005.
- [SKSP03] A. Schlögl, C. Keinrath, R. Scherer, and G. Pfurtscheller. Information transfer of an EEG-based brain computer interface. In *Conference on Neural Engineering*, pages 641–644, March 2003.
- [SLBP05] Alois Schlögl, Felix Lee, Horst Bischof, and Gert Pfurtscheller. Characterization of four-class motor imagery EEG data for the BCI-competition 2005. *Journal of neural engineering*, 2(4):L14, 2005.
- [SLP97] A. Schlögl, K. Lugger, and G. Pfurtscheller. Using adaptive autoregressive parameters for a brain-computer-interface experiment. In *19th Annu. Int. Conf. IEEE Eng. Med. Biol. Soc.*, volume 19, pages 1533–1535, 1997.
- [Smi02] L. Smith. *A Tutorial on Principal Component Analysis*, February 2002.
- [SSW84] A.R. Salmoni, R.A. Schmidt, and C.B. Walter. Knowledge of results and motor learning: a review and a critical appraisal. *Psychological Bulletin*, 5:355–386, 1984.
- [STV<sup>+</sup>06] U. Strehl, T. Trevorrow, R. Veit, T. Hinterberger, B. Kotchoubey, M. Erb, and N. Birbaumer. Deactivation of brain areas during self-regulation of slow cortical potentials in seizure patients. *Applied Psychophysiology and Biofeedback*, 31(1):85–94, 2006.
- [Sut84] E.E. Sutter. The visual evoked response as a communication channel. *Proceedings of the IEEE Symposium on Biosensors*, pages 95–100, 1984.

- [Sut92] E.E. Sutter. The Brain Response Interface: Communication through visually-induced electrical brain responses. *Journal of Microcomputer Applications*, 15:31–45, 1992.
- [SV99] B.W. Sylverman and J.C. Vassilicos. Wavelets: the Key to Intermittent Information? *Royal Society Typescript*, 1999.
- [TKK75] T.A. Travis, C.Y. Kondo, and J.R. Knott. Alpha enhancement research: a review. *Biol Psychiatry*, 10:69–89, 1975.
- [UA96] Michael Unser and Akram Aldroubi. A Review of Wavelets in Biomedical Applications. *Proceeding of IEEE*, 84(4):626–638, April 1996.
- [Vap06] Vladimir Vapnik. *Estimation of dependences based on empirical data*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [Vet87] M. Vetterli. A theory of multirate filter banks. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35(3):356–372, Mar 1987.
- [VH05] S. Verbonen and M. Hubert. Libra: a matlab library for robust analysis. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 75:127–136, 2005.
- [VHT<sup>+</sup>03] Theresa M. Vaughan, Wiliam J. Heetderks, Leonard J. Treo, WiliamZ. Rymer, Michael Weinreich, Melody M. Moore, Andrea Kübler and Bruce H. Dobkin, Niels Birbaumer, Enmanuel Dochin, Elisabeth W. Wolpaw, and Jonathan R. Wolpaw. Brain-Computer Interface Technology: A Review of the Second International Meeting. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 11(2):94–108, June 2003.
- [VK95] M. Vetterli and J. Kovacevic. *Wavelets and subband coding*. Prentice Hall, 1995.
- [VKBS09] Carmen Vidaurre, Nicole Krämer, Benjamin Blankertz, and Alois Schlögl. Time domain parameters as a feature for EEG-based brain-computer interfaces. *Neural Networks*, 22(9):1313–1319, 2009.
- [WB78] A.R. Wyler and K.J. Burchiel. Factors influencing accuracy of operant conditioning of tract neurons in monkey. *Brain Research*, 152:418–421, 1978.
- [WBH<sup>+</sup>00] J. R. Wolpaw, N. Birbaumer, W. J. Heetdeerks, D. J. McFarland and P. H. Peckham, G. Schalk, E. Dochin, L. A. Quatrano, C. J. Robinson, and T. M. Vaughan. Brain-Computer Interface Technology: A Review of the First International Meeting. *IEEE Transactionns on Rehabilitation Engineering*, 8(2):164–174, June 2000.

- [WBM<sup>+</sup>02] J. W., N. B., D. J. McFarland, G. Pfurtscheller, and T. M. Vaughan. Brain-Computer Interfaces for Communication and Control. *Clinical Neurophysiology*, 113(6):767–791, June 2002.
- [WBR79] A.R. Wyler, K.J. Burchiel, and S.A. Robbins. Operant control of precentral neurons in monkeys: evidence against open loop control. *Brain Research*, 171:29–39, 1979.
- [WM94] J. R. Wolpaw and D. J. McFarland. Multichannel EEG-based brain-computer communication. *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.*, 90:444–449, 1994.
- [WM04] J. R. Wolpaw and D. J. McFarland. Control of a two-dimensional movement signal by a non-invasive brain-computer interface in humans. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 101:17849–17854, 2004.
- [WMB<sup>+</sup>04] Nikolaus Weiskopf, Klaus Mathiak, Simon W Bock, Frank Scharnowski, Ralf Veit, Wolfgang Grodd, Rainer Goebel, and Niels Birbaumer. Principles of a brain-computer interface (BCI) based on real-time functional magnetic resonance imaging (fMRI). *IEEE transactions on biomedical engineering*, 51(6):966–970, 2004.
- [WMNF91a] J. R. Wolpaw, D. J. McFarland, G.W. Neat, and C.A. Forneris. EEG-based brain-computer interface for cursor control. *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.*, 78:252–259, 1991.
- [WMNF91b] J.R. Wolpaw, D. J. McFarland, G. W. Neat, and C.A. Forneris. An EEG-based brain-computer interface for cursor control. *Electroenceph clin Neurophysiol*, 78:252–259, 1991.
- [WMV00] J.R. Wolpaw, D. J. McFarland, and T.M. Vaughan. Brain-computer interface research at the Wadsworth Center. *IEEE Trans Rehabil Eng*, 8:222–225, 2000.
- [Wol66] H. Wold. *Multivariate Analysis*, chapter Estimation of principal components and related models by iterative least squares, pages 391–420. New York Academic Press, 1966.
- [Wor97] K.J. Worsley. An overview and some new developments in the statistical analysis of PET and fMRI data. *Human Brain Mapping*, 5:254–258, 1997.
- [WPB<sup>+</sup>09] Stephan Waldert, Tobias Pistohl, Christoph Braun, Tonio Ball, Ad Aertsen, and Carsten Mehring. A review on directional information in neural signals for brain-machine interfaces. *Journal of Physiology-Paris*, 103(3):244–254, 2009.

- [WRWI84] S. Wold, A. Ruhe, H. Wold, and W.J. Dunn III. The collinearity problem in linear regression. the partial least squares (PLS) approach to generalized inverses. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 5(3):735 – 743, September 1984.
- [WSE01] S. Wold, M. Sjöström, and L. Eriksson. Pls-regression: a basic tool of chemometrics. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 58(2):109–130, October 2001.
- [WSX<sup>+</sup>10] Wei Wang, Gustavo P Sudre, Yang Xu, Robert E Kass, Jennifer L Collinger, Alan D Degenhart, Anto I Bagic, and Douglas J Weber. Decoding and cortical source localization for intended movement direction with MEG. *Journal of neurophysiology*, 104(5):2451–2461, 2010.
- [Wu,04] Wu, Ting-Fan and Lin, Chih-Jen and Weng, Ruby C. Probability Estimates for Multi-class Classification by Pairwise Coupling. *Journal of Machine Learning Research*, 5:975–1005, 2004.
- [ZGW08] Haihong Zhang, Cuntai Guan, and Chuanchu Wang. Asynchronous P300-based brain-computer interfaces: A computational approach with statistical models. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 55(6):1754–1763, 2008.